Требования к оформления контрольной работы

Контрольная работа оформляется на отдельных односторонних листах А4 с проставлением номеров страниц (титульный лист считается, но не нумеруется).

Задания выполняются в порядке их следования.

Задание (1-5) должно включать в себя (именно такой порядок):

1) условие задачи;

2) решение.

Оформление титульного листа:

Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный технический университет

Кафедра «Вычислительная техника»

Контрольная работа

по дисциплине: «Экономико-математические методы»

Вариант №

Выполнил: ст. гр. _____

_____

Проверил: ст.пр. каф ВТ

Дружинина Л. В.

Волгоград 2016

Задание для контрольной работы

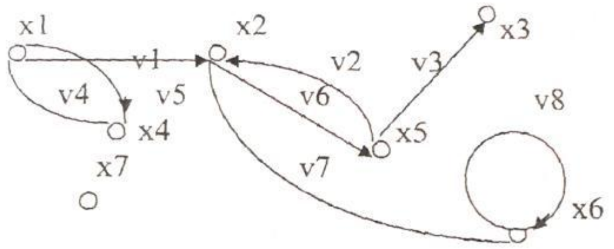
1. Задать представленный граф: перечислением, матрицей смежности и инцидентности. (Рис. 1)
2. Определить следующие характеристики графа: число ребер (дуг), вершин, коэффициент связности, степени всех вершин, цикломатическое число. (Рис. 1)
3. Определить метрические характеристики графа: диаметр, радиус, эксцентриситет каждой вершины, центральные вершины). (Рис. 1)
4. Определение кратчайшего пути из одной вершины в другую (алгоритм Дейкстры). (Рис. 2)
5. Необходимо решить транспортную задачу в соответствии со своим вариантом двумя способами:
    1. Метод северо-западного угла;
    2. Метод наименьшей стоимости.

Сделать вывод, какой метод приводит к плану с меньшими общими затратами.

Пример выполнения к.р.

Условие задачи №1:

Задать представленный граф: перечислением, матрицей смежности и инцидентности.



1. *Перечислительный способ:*

множество вершин: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_3, x_5, x_6, x_7\}$;

множество дуг: $V = \{(x_1, x_2),(x_5, x_2),(x_5, x_3),(x_1, x_4),(x_2, x_5),(x_6, x_6)\}$;

множество ребер: $V = \{(x_1, x_4),(x_2, x_6)\}$;

список изолированных вершин: {X7}.

2. *Матрица смежности:*

x_i / x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	2	0	0	0
x_2	0	0	0	0	1	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0	0	0	0
x_5	0	1	1	0	0	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0

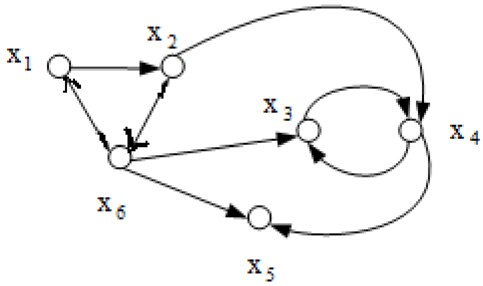
3. *Матрица инцидентности*

x_i / v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
x_1	1	0	0	1	1	0	0	0
x_2	-1	-1	0	0	0	1	1	0
x_3	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	1	-1	0	0	0
x_5	0	1	1	0	0	-1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	1
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0

Условие задачи №2:

Определить следующие характеристики графа: коэффициент связности, степени всех вершин, цикломатическое число.

Решение:



1. Определяем компоненту связности:

а) Построим матрицу смежности для графа:

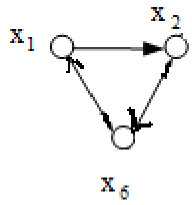
$A(G)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	0	0	0	0
x_2	0	0	0	1	0	1
x_3	0	0	0	1	0	0
x_4	0	0	1	0	1	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	1	0	1	0	1	0

б) Построим матрицу связности для графа:

$S(G)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	0	0	0	1
x_2	1	1	0	0	0	1
x_3	0	0	1	1	0	0
x_4	0	0	1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	1	0
x_6	1	1	0	0	0	1

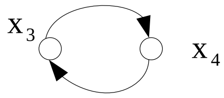
1) В матрице $S(G)$ в 1-ой строке находим единицы и заносим в 1-ую компоненту связности: $k_1=\{x_1, x_2, x_6\}$

2) Для того, что бы определить как будут связаны полученные вершины нужно из матрицы $A(G)$ выбрать те строки и столбцы, которые соответствуют взятым вершинам.



$A(G)$	x_1	x_2	x_6
x_1	0	1	0
x_2	0	0	1
x_6	1	0	0

3) В матрице $S(G)$ в 3-ей строке находим единицы и заносим во 2-ую компоненту связности: $k_2=\{x_3, x_4\}$.



$A(G)$	x_3	x_4
x_3	0	1
x_4	1	0

4) В матрице $S(G)$ в 5-ой строке находим единицы и заносим в 3-ую компоненту связности: $k_3=\{x_5\}$.

5) Следовательно к=3.

2. Определяем степени всех вершин

$$P(x_i) = P^+(x_i) + P^-(x_i)$$

$$P(x_1) = 0 + 2 = 2$$

$$P(x_2) = 2 + 1 = 3$$

$$P(x_3) = 2 + 1 = 3$$

$$P(x_4) = 2 + 2 = 4$$

$$P(x_5) = 1 + 1 = 2$$

$$P(x_6) = 1 + 3 = 4$$

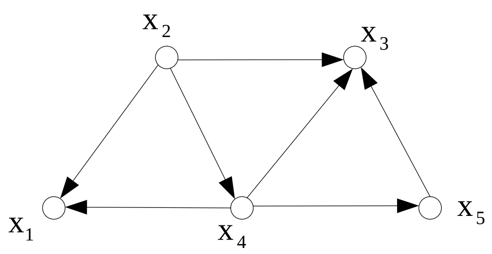
3. Определяем цикломатическое число:

$$\nu(G) = m - n + k$$

$$\nu(G) = 9 - 6 + 3 = 6$$

Условие задачи №3:

Определить метрические характеристики графа: диаметр, радиус, эксцентриситет каждой вершины, центральные вершины.



Решение:

1. Расстояние между вершинами:

d(x_1, x_2)=1

d(x_1, x_3)=2 d(x_1, x_3)=2

d(x_1, x_4)=1 d(x_2, x_4)=1 d(x_3, x_4)=1

d(x_1, x_5)=2 d(x_2, x_5)=2 d(x_3, x_5)=1 d(x_4, x_5)=1

2. Диаметром графа: d(G)=max (d(x_i, x_j))=2
3. Максимальным удалением (эксцентриситет):

   r(x_1)=2

   r(x_2)=2

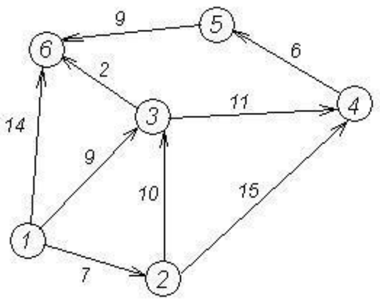
   r(x_3)=2

   r(x_4)=1

   r(x_5)=2
4. Радиусом графа: r(G)=min (r(x_i))=1
5. Центральная вершина: $x_{4.}$

Условие задачи №4:

Определение кратчайшего пути из одной вершины в другую (алгоритм Дейкстры).

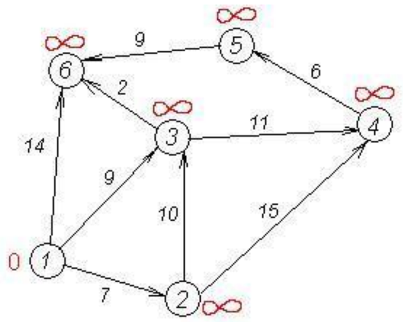


Решение:

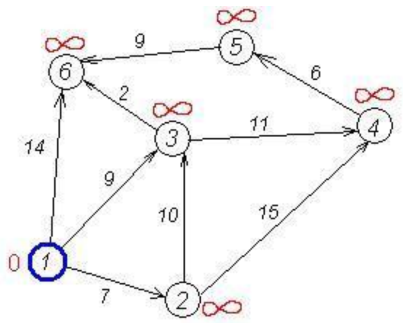
Пусть требуется найти расстояния от 1-й вершины до всех остальных.

Первый шаг:

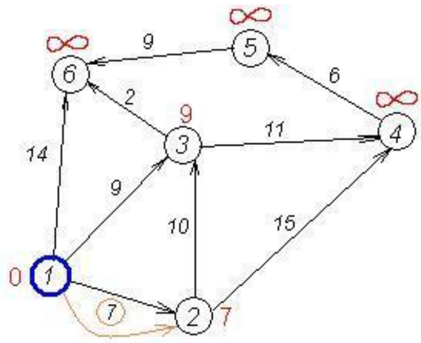
Вершине 1 присвоим метку 1, а всем остальным ∞.



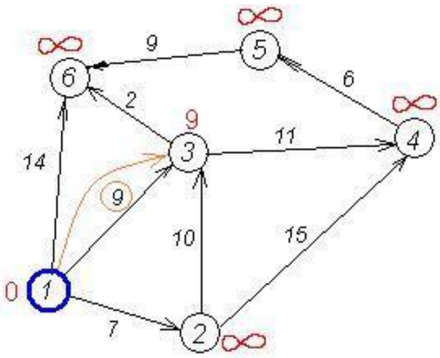
Минимальную метку имеет вершина 1. Ее соседями являются вершины 2, 3 и 6.

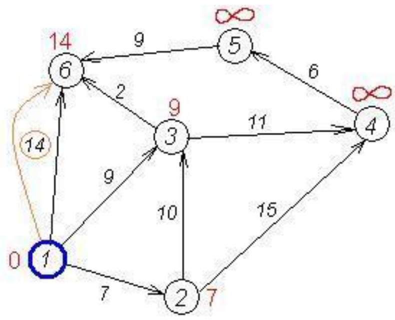


Первый по очереди сосед «вершины 1» — «вершина 2», потому что длина пути до нее минимальна. Длина пути в нее через «вершину 1» равна кратчайшему расстоянию до «вершины 1» + длина ребра, идущего из 1 в 2, то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки вершины 2, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7.

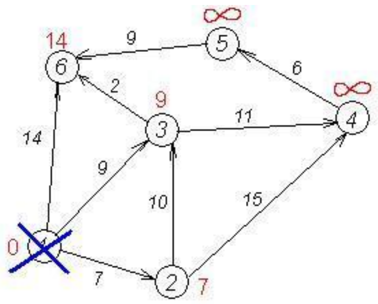


Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й и 6-й.

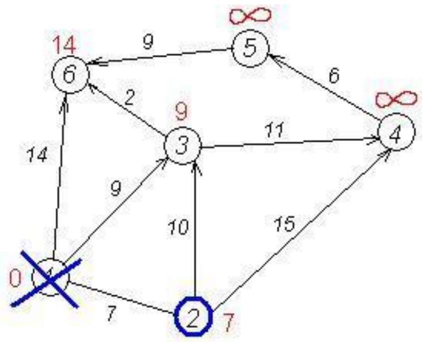




Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит. Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.



<u>Второй шаг:</u> Шаг алгоритма повторяется. Снова находим минимальную метку из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7.

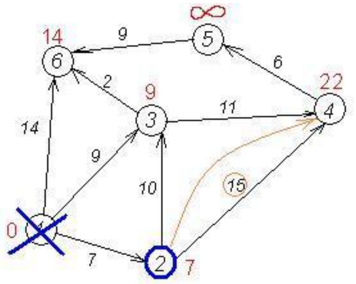


Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю. Соседями вершины 2 являются 1, 3, 4.

Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем.

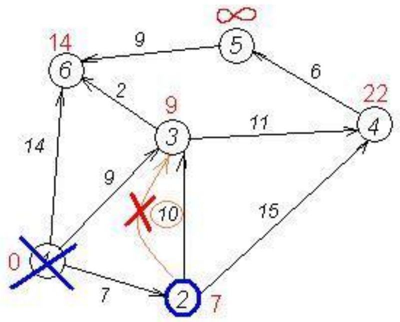
Следующий сосед вершины 2 — вершина 4.

Длина пути будет = кратчайшее расстояние до 2 + расстояние между вершинами 2 и 4 = 7 + 15 = 22. Т.к. 22<∞, устанавливаем метку вершины 4 равной 22.



Ещё один сосед вершины 2 — вершина 3.

Длина такого пути будет = 7 + 10 = 17. Но текущая метка третьей вершины равна 9<17, поэтому метка не меняется.



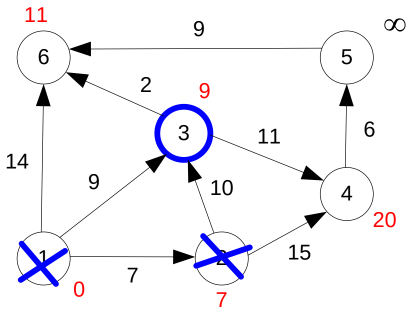
Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем ее как посещенную.

<u>Третий шаг:</u> Снова находим минимальную метку из непосещенных вершин (вершина 3).

Соседями вершины 3 являются 6 и 4.

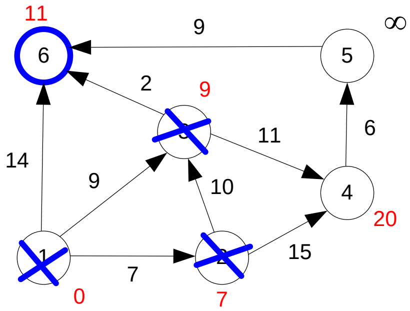
вершина 4: длина пути будет = 9 + 11 = 20. Текущая метка вершины 4 равна 22, т.к. 20<22 меняем метку на 20.

вершина 6: длина пути будет = 9 + 2 = 11. Текущая метка вершины 6 равна 14, т.к. 11<14 меняем метку на 11.



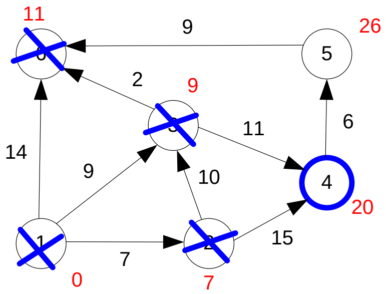
Все соседи вершины 3 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем ее как посещенную.

<u>Четвертый шаг:</u> Снова находим минимальную метку из непосещенных вершин (вершина 6). У данной вершины соседей нет, соответственно помечаем ее как посещенную.



<u>Пятый шаг:</u> Снова находим минимальную метку из непосещенных вершин (вершина 4). Соседом вершины 4 являются 5.

вершина 5: длина пути будет = 20 + 6 = 26. Т.к. 26<∞, устанавливаем метку вершины 5 равной 26.



Все соседи вершины 4 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем ее как посещенную.

<u>Завершение выполнения алгоритма:</u> Алгоритм заканчивает работу, когда вычеркнуты все вершины.

Результат его работы: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й — 26, до 6-й — 11.

Условие задачи №5:

Груз, хранящийся на трех складах А1 (А1 – склад 1), А2, А3 необходимо развести по 5-ти магазинам В1 (В1 – магазин 1), В2, В3, В4, В5. Для перевозки грузов требуется 300, 150, 250 автомашин соответственно. Первому магазину требуется 170 машин груза, второму – 110, третьему – 100, четвертому -120, пятому – 200 машин. Составьте оптимальный по стоимости план перевозки грузов со складов до магазинов. Расстояния от складов до магазинов указаны в следующей таблице.

____	**М1**	**М2**	**М3**	**М4**	**М5**
С1	70	50	15	80	70
С2	80	90	40	60	85
С3	50	10	90	11	25

Решение:

1. Метод северо-западного угла

При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется левая верхняя клетка (северо-западный угол) оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки неизвестного x_{11} и заканчивается в клетке неизвестного x_{mn} , т. е. идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Пункты Отправления	Запасы	Пункты назначения				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		170	110	100	120	200
A_1	300	70 / 170	50 / 110	15 / 20	80	70
A_2	150	80	90	40 / 80	60 / 70	85
A_3	250	50	10	90	11 / 50	25 / 200

1. Заполнение таблицы начинается с ее северо-западного угла, т.е. клетки с неизвестным x_{11}.
2. Первая база A_1 может полностью удовлетворить потребность первого заказчика B_1 (a_1=300, b_1=170, $a_1 > b_1$). Полагая x_{11}= 170, вписываем это значение в клетку x_{11} и исключаем из рассмотрения первый столбец. На базе A_1 остается измененный запас $a'_1 = 130$.
3. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1,A_2,A_3 и четырьмя столбцами B_1,B_2,B_3,B_4; северо-западным углом будет клетка для неизвестного x_{12} . Первая база с запасом $a'_1 = 130$может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 $(a'_1 = 130, b_2 = 110, a'_1 > b_2)$. Полагаем x_{12} = 110, вписываем это значение в клетку x_{12} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_1 остается новый остаток (запас) $a''_1 = 20$.
4. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1,A_2,A_3 и тремя столбцами B_3,B_4,B_5 северо-западным углом будет клетка для неизвестного x_{13}. Теперь третий заказчик B_3 может принять весь запас с базы A_1 $(a''_1 = 20, b_3 = 100, a''_1 < b_3)$. Полагаем x_{13} = 20, вписываем это значение в клетку x_{13} и исключаем из рассмотрения первую строку. У заказчика из B_3 осталась еще не удовлетворенной потребность $b'_3 = 80$.
5. Теперь переходим к заполнению клетки для неизвестного x_{23} и т.д. Через шесть шагов у нас останется одна база A_3 с запасом груза (остатком от предыдущего шага) $a'_3 = 200$и один пункт B_5 с потребностью b_5=200 . Соответственно этому имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, положив x_{35}=200. План составлен.

6. Базис образован неизвестными $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}$. Правильность составленного плана легко проверить, подсчитав суммы чисел, стоящих в заполненных клетках по строкам и столбцам.
7. Общий объем перевозок в тонно-километрах для этого плана составит:

$$S_1 = 70 \cdot 170 + 50 \cdot 110 + 15 \cdot 20 + 40 \cdot 80 + 60 \cdot 70 + 11 \cdot 50 + 25 \cdot 200 = 30650$$

2. Метод наименьшей стоимости.

При этом методе на каждом шаге построения опорного плана первою заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф. Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них.

Пункты Отправления	Запасы	Пункты назначения				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		170	110	100	120	200
A_1	300	70 20	50	15 100	80	70 180
A_2	150	80 150	90	40	60	85
A_3	250	50	10 110	90	11 120	25 20

1. В данном случае заполнение таблицы начинается с клетки для неизвестного x_{32}, для которого мы имеем значение $c_{32} = 10$, наименьше из всех значений c_{ij} . Эта клетка находится на пересечении третьей строки и второго столбца, соответствующим третьей базе A_3 и второму заказчику B_2.
2. Третья база A_3 может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 (a_3=250, b_2=110, $a_3 > b_2$) . Полагая x_{32} = 110, вписываем это значение в клетку x_{32} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_3 остается изменённый запас $a'_3 = 140$.

3. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1,A_2,A_3 и четырьмя столбцами B_1,B_3,B_4,B_5 клеткой с наименьшим значением c_{ij} клетка, где c_{34}=11. Заполняем описанным выше способом эту клетку и аналогично заполняем следующие клетки. В результате оказываются заполненными (в приведенной последовательности) следующие клетки: $x_{32}=110, x_{34}=120, x_{13}=100, x_{35}=20, x_{15}=180, x_{11}=20, x_{21}=150$
4. На пятом шаге клеток с наименьшими значениями c_{ij} оказалось две ($c_{11}=c_{15}=70$) . Мы заполнили клетку для x_{15} , положив x_{15} = 180. Можно было выбрать для заполнения другую клетку, положив x_{11} = 170, что приведет в результате к другому опорному плану.
5. Общий объем перевозок в тонно-километрах для этого плана составит:

$$S=70\cdot 20+15\cdot 100+70\cdot 180+80\cdot 150+10\cdot 110+11\cdot 120+25\cdot 20=30420$$

<u>Ответ: метод наименьшей стоимости оптимален, т.к. $S< S_1$</u>

Варианты заданий

1

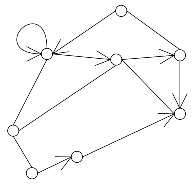


Рис. 1

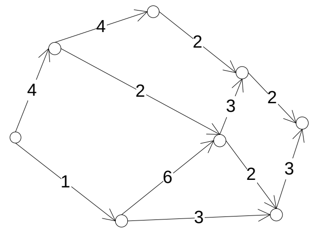


Рис. 2

Груз, хранящийся на четырех складах С1 (С1 – склад 1), С2, С3, С4, необходимо развести по 6-ти магазинам М1 (М1 – магазин 1), М2, М3, М4, М5, М6. Для перевозки грузов требуется 45,40,45,50 автомашин соответственно. Первому магазину требуется 20 машин груза, второму – 45, третьему – 25, четвертому -35, пятому – 20 и шестому – 35 машин. Составьте оптимальный по стоимости план перевозки грузов со складов до магазинов. Расстояния от складов до магазинов указаны в следующей таблице.

____	М1	М2	М3	М4	М5	М6
С1	3	4	5	4	11	5
С2	2	7	3	7	3	2
С3	1	3	3	2	8	8
С4	3	2	7	4	5	11

2

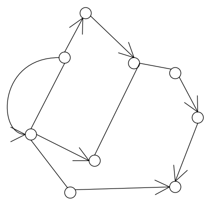


Рис. 1

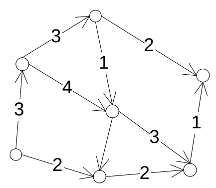


Рис. 2

На четырех элеваторах ЭА (ЭА – Элеватор А), ЭВ, ЭС, ЭD находится зерно в количестве 110, 125, 145, 135 т, которое нужно доставить на четыре сельскохозяйственных предприятия для посева. Предприятию 1 необходимо поставить 135т, предприятию 2 – 145, предприятию 3 – 80, предприятию 4- 155т зерна. Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки. Стоимость доставки потребителям от поставщиков представлена в таблице.

____	П1	П2	П3	П4
ЭА	3	4	5	6
ЭВ	7	9	8	7
ЭС	11	7	3	4
ЭD	8	4	7	5

3

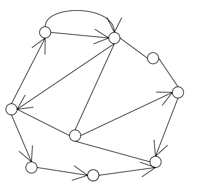


Рис. 1

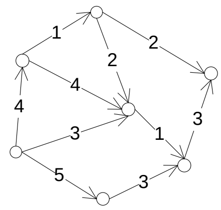


Рис. 2

Завод выпускает продукцию в четырех цехах: ЦА (ЦА – Цех А), ЦВ, ЦС, ЦD расположенных на разных территориях. Свою продукцию завод поставляет в пять магазинов города. Цех А производит 125 тыс. изделий, цех В -105, цех С- 95 и цех D – соответственно 130 тыс. шт. изделий. Плановая потребность магазинов в продукции завода следующая: М1 – 110 тыс. шт. изделий, М2 – 70 тыс. шт., М3- 85 тыс. шт., М4 – 75 тыс. шт., и М5 – 115 тыс. шт. Составьте такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку изделий были бы наименьшими. Стоимость перевозки 1 тыс. шт. изделий из цехов в магазины приведена в таблице.

____	М1	М2	М3	М4	М5
ЦА	2	3	6	8	2
ЦВ	8	1	2	3	9
ЦС	7	6	4	1	5
ЦD	2	10	8	5	3

4

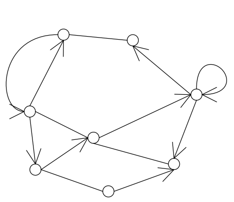


Рис. 1

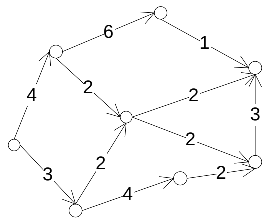


Рис. 2

Имеются четыре овощехранилища О1 (О1 –Овощехранилище 1) О2, О3, О4, расположенные в разных районах города, в которых сосредоточено 15, 25, 45 и 40 т овощей соответственно. Овощи необходимо перевезти четырем потребителям П1, П2, П3, П4 соответственно в количестве 35, 25, 45 и 20 т. Определите план перевозок продукта от хранилищ до потребителей из условия минимизации транспортных расходов. Расстояния от овощехранилищ до потребителей следующие:

____	П1	П2	П3	П4
О1	7	3	3	8
О2	7	6	2	7
О3	4	7	7	3
О4	5	2	4	5

5

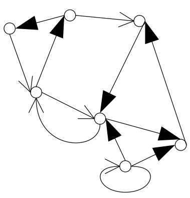


Рис. 1

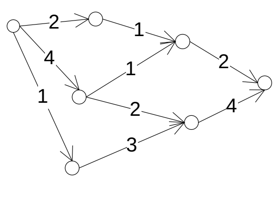


Рис. 2

Торговая фирма «Весна и осень» включает четыре предприятия П1 (П1 - предприятие 1), П2, П3, П4 и шесть складов С1 (С1 – склад 1), С2, С3, С4, С5, С6 в различных регионах страны. Каждый месяц предприятия фирмы производят 100, 15, 90 и 55 ед. продукции. Вся производимая продукция направляется на склады, вместимость которых следующая: 30, 40, 55, 80, 45, и 10 ед. продукции. Определите план перевозок продукта от фирмы до склада из условия минимизации транспортных расходов. Издержки транспортировки продукции от предприятий до складов следующие (ден. ед.):

____	**С1**	**С2**	**С3**	**С4**	**С5**	**С6**
П1	1	5	2	2	1	6
П2	3	6	2	4	3	3
П3	8	10	4	5	6	8
П4	7	3	7	9	1	2

6

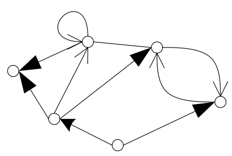


Рис. 1

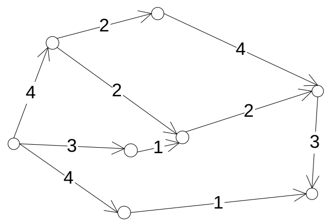


Рис. 2

Четыре хлебных комбината К1 (К1 – комбинат 1), К2, К3, К4 с производственными мощностями 115, 125, 90, 120 т хлебобулочных изделий в сутки поставляет свою продукцию в 5 магазинов города М1 (М1 - магазин 1), М2, М3, М4, М5. Потребность в хлебобулочных изделиях магазинов следующая: 80, 95, 75, 110, 90 т. Определите план перевозок продукции от хлебных комбинатов до магазинов при условия минимизации транспортных расходов. Издержки транспортировки продукции от хлебных комбинатов до магазинов следующие (ден. ед):

____	**М1**	**М2**	**М3**	**М4**	**М5**
К1	3	5	6	9	11
К2	9	2	4	6	14
К3	4	10	7	2	12
К4	7	3	11	9	4