

## Оглавление

Правила оформления и сдачи контрольных работ по курсу «Математика» .....	2
Вопросы к экзамену по дисциплине "Математика" (1 курс, 2 семестр) .....	3
Раздел 1. Функции многих переменных .....	5
Вариант № 1 .....	5
Вариант № 2 .....	5
Вариант № 3 .....	6
Вариант № 4 .....	6
Вариант № 5 .....	7
Вариант № 6 .....	7
Вариант № 7 .....	8
Вариант № 8 .....	8
Вариант № 9 .....	9
Вариант № 10 .....	9
Раздел 2. Интегрирование функции одной переменной .....	10
Вариант № 1 .....	10
Вариант № 2 .....	10
Вариант № 3 .....	11
Вариант № 4 .....	12
Вариант № 5 .....	12
Вариант № 6 .....	13
Вариант № 7 .....	13
Вариант № 8 .....	14
Вариант № 9 .....	14
Вариант № 10 .....	15
Раздел 3. Дифференциальные уравнения .....	16
Вариант 1 .....	16
Вариант 2 .....	16
Вариант 3 .....	17
Вариант 4 .....	17
Вариант 5 .....	18
Вариант 6 .....	18
Вариант 7 .....	19
Вариант 8 .....	19
Вариант 9 .....	20
Вариант 10 .....	20

## **ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ И СДАЧИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА»**

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера студенческого билета или зачетной книжки (если последняя цифра — 0, то номер выполняемого варианта — 10).

Для каждой задачи:

- полностью привести ее условие;
- привести содержательное решение;
- явным образом записать ответ.

В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего варианта.

Чистовой вариант работы выполняют в одном экземпляре, на белой бумаге форматом стандартного писчего листа (формат А-4, 210 x 297 мм).

## **ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "МАТЕМАТИКА" (1 КУРС, 2 СЕМЕСТР)**

1. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
2. Интегрирование путем замены переменной. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование простейших дробей.
4. Интегрирование дробно-рациональных функций.
5. Интегрирование иррациональных функций.
6. Интегрирование тригонометрических функций.
7. Понятие определенного интеграла.
8. Условие существования определенного интеграла.
9. Классы интегрируемых функций. Свойства интегрируемых функций.
10. Свойства определенных интегралов.
11. Теорема о среднем значении.
12. Определенный интеграл как функция переменного верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница.
13. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Численные методы интегрирования.
15. Геометрические приложения определенных интегралов.
16. Интеграл по бесконечному промежутку.
17. Интеграл от неограниченной функции.
18. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции многих переменных.
19. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
20. Использование дифференциала в приближенных вычислениях. Касательная плоскость.
21. Производные и дифференциалы высших порядков функций многих переменных.
22. Производные от сложных функций многих переменных.
23. Производная по заданному направлению. Градиент.
24. Исследование функций многих переменных на экстремум.
25. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
26. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
27. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
28. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
29. Уравнения в полных дифференциалах.
30. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли.
31. Численные методы решения дифференциальных уравнений.
32. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши для дифференциального уравнения высших порядков. Краевая задача.
33. Дифференциальные уравнения высших порядков, разрешимые в квадратурах.
34. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения
35. Теорема о структуре множества всех решений линейного однородного уравнения.

36. Решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных.
37. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
38. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.
39. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами (со специальной правой частью).

# РАЗДЕЛ 1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## ВАРИАНТ № 1

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \frac{x - y}{x^2 + y^2 - 1}.$$

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1.  $z = \ln xy$ ; 2.2.  $z = x^2 y^2$ ; 2.3.  $z = x \cos y$ .

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:

$$z = \operatorname{arctg} xy.$$

4. Найти производную функции  $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$  в точке  $M_0(1; 4)$  по направлению вектора

$$\vec{l}(1; -1).$$

5. Найти градиент функции  $z = x^3 - 2y^2 + xy$  в точке  $M_0(1; -1)$ .

6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{3,98} \cdot \sqrt[3]{8,02}}.$$

## ВАРИАНТ № 2

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \frac{x - y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1.  $z = \sqrt{xy}$ ; 2.2.  $z = x^4 y^2$ ; 2.3.  $z = x \sin y$ .

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:

$$z = \operatorname{ctg} xy.$$

4. Найти производную функции  $z = \sqrt{xy}$  в точке  $M_0(1; 4)$  по направлению вектора

$$\vec{l}(1; 1).$$

5. Найти градиент функции  $z = x^2 - 2y^2 + 2xy$  в точке  $M_0(1; -1)$ .

6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{4,01} \cdot \sqrt[3]{8,02}}.$$

### ВАРИАНТ № 3

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \frac{x - y}{x^2 + y - 1}.$$

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1.  $z = \cos xy$ ; 2.2.  $z = \frac{y^2}{x^2}$ ; 2.3.  $z = x \operatorname{tg} y$ .

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:  
 $z = \arcsin xy$ .

4. Найти производную функции  $z = \cos xy$  в точке  $M_0(0; \frac{\pi}{6})$  по направлению вектора  $\vec{l}(1; -1)$ .

5. Найти градиент функции  $z = x^2 + 2y^2 + xy$  в точке  $M_0(-1; -1)$ .

6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt{4,03} \cdot \sqrt[3]{1,02}$ .

### ВАРИАНТ № 4

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \frac{x - y}{x + y^2 - 1}.$$

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1.  $z = \frac{xy}{\ln x}$ ; 2.2.  $z = \frac{x}{y^3}$ ; 2.3.  $z = x \operatorname{ctg} y$ .

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:  
 $z = \arccos xy$ .

4. Найти производную функции  $z = x\sqrt{y}$  в точке  $M_0(-1; 4)$  по направлению вектора  $\vec{l}(1; -1)$ .

5. Найти градиент функции  $z = x - 2y^2 + xy$  в точке  $M_0(1; 1)$ .

6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения  $\sqrt[3]{0,96} \cdot \sqrt{9,04}$ .

## ВАРИАНТ № 5

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \frac{x + y}{x + 4y^2 - 1}.$$

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1.  $z = \sqrt{xy}$ ; 2.2.  $z = x^2y - 3xy^2$ ; 2.3.  $z = x \ln y$ .

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:  
 $z = \operatorname{ctg} xy$ .

4. Найти производную функции  $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$  в точке  $M_0(1; 4)$  по направлению вектора  $\vec{l}(1; -1)$ .

5. Найти градиент функции  $z = x^3 - 2y^2 + xy$  в точке  $M_0(1; -1)$ .

6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения  $\frac{\sqrt[3]{1,06}}{\sqrt{3,96}}$ .

## ВАРИАНТ № 6

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:  
 $z = \ln(x^2 - y - 1)$ .

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1.  $z = \frac{\sqrt{xy}}{x + y}$ ; 2.2.  $z = x^2y^2 - 3xy$ ; 2.3.  $z = xe^y$ .

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:  
 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ .

4. Найти производную функции  $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$  в точке  $M_0(1; 4)$  в направлении, составляющем с осью абсцисс угол  $\alpha = 45^\circ$ .

5. Найти градиент функции  $z = 2\sqrt{y^2 - x^2}$  в точке  $M_0(3; 5)$ .

6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения  $\cos 46^\circ \cdot \cos 59^\circ$ .

## ВАРИАНТ № 7

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1.  $z = \frac{\sqrt{xy}}{x-y}$ ; 2.2.  $z = x^2y - 3xy^2 + xy$ ; 2.3.  $z = xe^{xy}$ .

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4. Найти производную функции  $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$  в точке  $M_0(1; 1)$  в направлении, составляю-

щем с осью абсцисс угол  $\alpha = 135^\circ$ .

5. Найти градиент функции  $z = 2\sqrt{y^2 - x^2}$  в точке  $M_0(1; 3)$ .

6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения  $\cos 29^\circ \cdot \cos 59^\circ$ .

## ВАРИАНТ № 8

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \ln(x^2 - y^2 - 1).$$

2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:

2.1.  $z = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$ ; 2.2.  $z = x^3y^2 - 3xy - y^2$ ; 2.3.  $z = 6^{xy}$ .

3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:

$$z = \sqrt{x^2 - 2y^2}.$$

4. Найти производную функции  $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$  в точке  $M_0(1; 1)$  в направлении, составляю-

щем с осью абсцисс угол  $\alpha = 60^\circ$ .

5. Найти градиент функции  $z = 2\sqrt{y^2 - x^2}$  в точке  $M_0(-3; 5)$ .

6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения  $\sin 46^\circ \cdot \cos 59^\circ$ .

## ВАРИАНТ № 9

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:  
 $z = \ln(x - y + 1)$ .
2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:  
2.1.  $z = \frac{\sqrt{x-y}}{x+y}$ ; 2.2.  $z = x^2y^2 - x^2y + xy^2$ ; 2.3.  $z = 10^{xy}$ .
3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:  
 $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$ .
4. Найти производную функции  $z = \sqrt{xy}$  в точке  $M_0(1; 4)$  в направлении, составляющем с осью абсцисс угол  $\alpha = 45^\circ$ .
5. Найти градиент функции  $z = -2\sqrt{x^2 - y^2}$  в точке  $M_0(3; 5)$ .
6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения  $\sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$ .

## ВАРИАНТ № 10

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:  
 $z = \ln(x - y^2 + 1)$ .
2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных:  
2.1.  $z = \frac{\sqrt{x-y}}{xy}$ ; 2.2.  $z = \frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + 2y$ ; 2.3.  $z = x^y$ .
3. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных:  
 $z = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{xy}$ .
4. Найти производную функции  $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$  в точке  $M_0(1; 1)$  в направлении, составляющем с осью абсцисс угол  $\alpha = 30^\circ$ .
5. Найти градиент функции  $z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M_0(-3; 5)$ .
6. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения  $\sin 46^\circ \cdot \sin 29^\circ$ .

## РАЗДЕЛ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### ВАРИАНТ № 1

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1.  $\int \frac{dx}{1+7x}$ ; 1.2.  $\int \frac{xdx}{2x-4}$ ; 1.3.  $\int \frac{dx}{3-4x^2}$ ; 1.4.  $\int \frac{dx}{x \ln x}$ ; 1.5.  $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}}$ ;

1.6.  $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$ ; 1.7.  $\int \ln^2 x$ ; 1.8.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ ; 1.9.  $\int \sin^3 2x dx$ ;

1.10.  $\int \cos^5 x \sqrt[3]{\sin^2 x} dx$ .

2. Вычислить определённые интегралы:

2.1.  $\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x}$ ; 2.2.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos 2x dx$ ; 2.3.  $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-\cos^2 x} dx$ .

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = -x$ ,  $x = -2$ .

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 2x$ .

### ВАРИАНТ № 2

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1.  $\int \frac{dx}{6-2x}$ ; 1.2.  $\int \frac{xdx}{5x-1}$ ; 1.3.  $\int \frac{dx}{1-4x^2}$ ; 1.4.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ; 1.5.  $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

1.6.  $\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$ ; 1.7.  $\int x \ln^2 x dx$ ; 1.8.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-6}}$ ; 1.9.  $\int \sin^4 2x dx$ ;

1.10.  $\int \cos^3 x \sqrt[3]{\sin^2 x} dx$ .

2. Вычислить определённые интегралы:

$$2.1. \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}; 2.2. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx; 2.3. \int_0^1 \sqrt{4 - \sin^2 x} dx.$$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = 2 \cos x$ ,  $y = 3 \cos x$ ,  $x = -\pi$ ,  $x = \pi$ .

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x$ .

### ВАРИАНТ № 3

1. Найти неопределённые интегралы:

$$1.1. \int \frac{dx}{3x + 7}; 1.2. \int \frac{2x dx}{x + 5}; 1.3. \int \frac{dx}{6 - 2x^2}; 1.4. \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1 + x^2}; 1.5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - 2x^3}};$$

$$1.6. \int \frac{dx}{x^2 - x + 2}; 1.7. \int x \ln x; 1.8. \int \frac{dx}{x \sqrt{2x^2 + 1}}; 1.9. \int \cos^4 2x dx;$$

$$1.10. \int \cos x \sqrt[3]{\sin^2 x} dx.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$2.1. \int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x - 2}; 2.2. \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x dx; 2.3. \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - \cos^2 x} dx.$$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:  $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 - x^2}$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ .

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 2$ ,  $x = 4$ .

## ВАРИАНТ № 4

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1.  $\int \frac{dx}{3-8x}$ ; 1.2.  $\int \frac{3xdx}{2x+1}$ ; 1.3.  $\int \frac{dx}{2-5x^2}$ ; 1.4.  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ ; 1.5.  $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x^2}}$ ;

1.6.  $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$ ; 1.7.  $\int x^2 \ln x dx$ ; 1.8.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-1}}$ ; 1.9.  $\int \cos^3 3x dx$ ;

1.10.  $\int \sin^5 x \sqrt{\cos^2 x} dx$ .

2. Вычислить определённые интегралы:

2.1.  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-7x+12}$ ; 2.2.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x dx$ ; 2.3.  $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-\sin^2 x} dx$ .

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^e x \ln x dx.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sin x$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ .

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^2$ ,  $y = 2x$ .

## ВАРИАНТ № 5

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1.  $\int \frac{dx}{2-3x}$ ; 1.2.  $\int \frac{3xdx}{2x+1}$ ; 1.3.  $\int \frac{dx}{4-3x^2}$ ; 1.4.  $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$ ; 1.5.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+5x^3}}$ ;

1.6.  $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ ; 1.7.  $\int x e^x dx$ ; 1.8.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$ ; 1.9.  $\int \sin^5 x dx$ ;

1.10.  $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$ .

2. Вычислить определённые интегралы:

2.1.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1}$ ; 2.2.  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \cos 2x dx$ ; 2.3.  $\int_0^2 \sqrt{4-\cos^2 x} dx$ .

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = 4 \sin 3x$ ,  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^2$ ,  $y = 4x$ .

### ВАРИАНТ № 6

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1.  $\int (3-2x)^3 dx$ ; 1.2.  $\int \frac{x^2 dx}{2x+1}$ ; 1.3.  $\int \frac{xdx}{4-3x^2}$ ; 1.4.  $\int \frac{(2+\ln x) dx}{x}$ ; 1.5.  $\int \frac{x^2 dx}{5x^3-1}$ ;

1.6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ ; 1.7.  $\int x^2 e^x dx$ ; 1.8.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ ; 1.9.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ ;

1.10.  $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$ .

2. Вычислить определённые интегралы:

2.1.  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 2.2.  $\int_1^e \ln x dx$ ; 2.3.  $\int_0^2 \sqrt[3]{x^5} dx$ .

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = x$ ,  $x = 3$ .

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^3$ ,  $y = x$ .

### ВАРИАНТ № 7

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1.  $\int (2-x)^3 dx$ ; 1.2.  $\int \frac{2x^2 dx}{x+1}$ ; 1.3.  $\int \frac{2xdx}{4-x^2}$ ; 1.4.  $\int \frac{(1+\ln x) dx}{2x}$ ; 1.5.  $\int \frac{x^2 dx}{4x^6-1}$ ;

1.6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ ; 1.7.  $\int x^2 \cos x dx$ ; 1.8.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ ; 1.9.  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ ;

1.10.  $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$ .

2. Вычислить определённые интегралы:

2.1.  $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 2.2.  $\int_1^e x \ln x dx$ ; 2.3.  $\int_0^2 \sqrt[3]{x^7} dx$ .

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^3}}.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = -x^2 + 6x - 8$ ,  $x = -1$ .

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^3$ ,  $y = 4x$ .

### ВАРИАНТ № 8

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1.  $\int (2+4x)^4 dx$ ; 1.2.  $\int \frac{3x^2 dx}{2x-3}$ ; 1.3.  $\int \frac{3x dx}{1-3x^2}$ ; 1.4.  $\int \frac{(1+\ln 2x) dx}{x}$ ;

1.5.  $\int \frac{x^3 dx}{2x^8+1}$ ; 1.6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+5}}$ ; 1.7.  $\int x \cos x dx$ ; 1.8.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ ;

1.9.  $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$ ; 1.10.  $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$ .

2. Вычислить определённые интегралы:

2.1.  $\int_{-1/2}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 2.2.  $\int_1^e \ln(x+1) dx$ ; 2.3.  $\int_0^2 \sqrt[4]{x^5} dx$ .

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 8$ .

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^3$ ,  $y = x$ .

### ВАРИАНТ № 9

1. Найти неопределённые интегралы:

1.1.  $\int (5+2x)^5 dx$ ; 1.2.  $\int \frac{2x^2 dx}{3x-4}$ ; 1.3.  $\int \frac{3x dx}{6-x^2}$ ; 1.4.  $\int \frac{(2-\ln x) dx}{x}$ ; 1.5.  $\int \frac{2x^2 dx}{9x^3+1}$ ;

$$1.6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}; 1.7. \int x^2 \sin x dx; 1.8. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x+1}}; 1.9. \int \operatorname{tg}^4 x dx;$$

$$1.10. \int \cos^2 x \sin^2 x dx.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$2.1. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}; 2.2. \int_1^e \ln(2x-1) dx; 2.3. \int_0^1 \sqrt[6]{x^5} dx.$$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:  $\int_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2 - 8}.$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3 \cos 2x, y = 1\frac{1}{2}, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}.$$

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^3, y = 4x.$

### ВАРИАНТ № 10

1. Найти неопределённые интегралы:

$$1.1. \int (7-2x)^6 dx; 1.2. \int \frac{4x^2 dx}{x-4}; 1.3. \int \frac{5x dx}{2-3x^2}; 1.4. \int \frac{(2+\ln^2 x) dx}{x};$$

$$1.5. \int \frac{3x^2 dx}{2x^6-1}; 1.6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}; 1.7. \int x^2 \sin x dx; 1.8. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}};$$

$$1.9. \int \frac{1}{\sin^4 x} dx; 1.10. \int \cos^3 x \sin^5 x dx.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$2.1. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}; 2.2. \int_1^e \ln x^2 dx; 2.3. \int_0^1 \sqrt[7]{x^5} dx.$$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $x = 1 - y^2, x = 0.$

5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^3, y = x.$

### РАЗДЕЛ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия. В задаче 10 найти решения заданного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка для **ВСЕХ** указанных в условии правых частей.

#### ВАРИАНТ 1

1.  $y' = 3\sqrt[3]{(y+1)^2}$ ,  $y(2) = 0$ ;

2.  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ;

3.  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ,  $y(0) = 0$ ;

4.  $\frac{1}{y'} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x}$ ;

5.  $xy'' = y'$ ;

6.  $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ;

7.  $y'' - 6y' + 13y = 0$   $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = 2$ ;

8.  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ;

9.  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ;

10.  $y'' - 6y' + 13y = f_i(x)$ ,  $f_i(x) = \begin{cases} f_1 = e^{2x}; \\ f_2 = \cos 3x; \\ f_3 = 2x^2 + 1; \\ f_4 = 2f_1 - f_2 - f_3; \end{cases}$

#### ВАРИАНТ 2

1.  $(x+2)^2 y' = 1$ ,  $y(0) = -1$ ;

2.  $y^2 + x^2 y' = xy y'$ ;

3.  $y' = 2y + e^x - x$ ,  $y(0) = \frac{1}{4}$ ;

4.  $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$ ;

5.  $xy'' = (1+x^2)y'$

6.  $y'' \operatorname{ctg} y = 2(y')^2$ ;

7.  $y'' - 2y' + 5y = 0$   $y(0) = 2$ ;  $y'(\pi) = 1$ ;

8.  $y'' - 7y' + 12y = 0$ ;

9.  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ;

10.  $y'' - 2y' + 5y = f_i(x)$ ,  $f_i(x) = \begin{cases} f_1 = e^{-x}; \\ f_2 = \sin x; \\ f_3 = 3x^2 + 2; \\ f_4 = f_1 + 2f_2 + f_3; \end{cases}$

### ВАРИАНТ 3

1.  $y' \operatorname{ctgx} + y = 2, y(0) = -1;$

2.  $xy' = y \ln \frac{y}{x} + y;$

3.  $xdy + ydx = x \ln x dx, y(1) = 1;$

4.  $y' = y \operatorname{ctgx} + \frac{y^2}{\sin x};$

5.  $xy'' = y' + x^2;$

6.  $(y')^2 + yy'' = 0;$

7.  $y'' + y' - 2y = 0 \quad y(1) = 0; y'(1) = 1;$

8.  $y'' - 2y' + y = 0;$

9.  $y'' + y = 0;$

10.  $y'' + y' - 2y = f_i(x), f_i(x) = \begin{cases} f_1 = 2e^x; \\ f_2 = \sin x; \\ f_3 = x^2 - 1; \\ f_4 = -f_1 + f_2 + 3f_3; \end{cases}$

### ВАРИАНТ 4

1.  $e^y(1+x^2)dy = 2x^2(1+e^y)dx, y(0) = 0;$

2.  $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2};$

3.  $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2, y(0) = 1;$

4.  $3y' = (1-3y^2)y \sin x;$

5.  $x \ln x \cdot y'' = y';$

6.  $yy'' + y^2 - (y')^2 = 0;$

7.  $y'' - 8y' + 16y = 0 \quad y(0) = 1; y'(0) = 2;$

8.  $y'' - 6y' + 8y = 0;$

9.  $y'' + 6y' + 10y = 0;$

10.  $y'' - 8y' + 16y = f_i(x), f_i(x) = \begin{cases} f_1 = -e^{4x}; \\ f_2 = \cos 2x; \\ f_3 = 3x^2 + 1; \\ f_4 = 3f_1 + 2f_2 - f_3; \end{cases}$

## ВАРИАНТ 5

1.  $(1+y^2)dx + xydy = 0, y(1) = 0;$

2.  $xy' = y - x;$

3.  $y' + 2y = e^{2x}, y(0) = 0;$

4.  $ydx + \left(x - \frac{x^2y}{2}\right)dy = 0;$

5.  $(x+4)y'' = y' \ln \frac{y'}{(x+4)};$

6.  $yy'' - 2yy' \ln y - (y')^2 = 0;$

7.  $y'' - 4y' + 5y = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^\pi; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

8.  $y'' + 2y' - 3y = 0;$

9.  $y'' - 12y' + 36y = 0;$

10.  $y'' - 4y' + 5y = f_i(x), f_i(x) = \begin{cases} f_1 = 4e^x; \\ f_2 = \sin x; \\ f_3 = 3x^2; \\ f_4 = f_1 - 2f_2 + f_3; \end{cases}$

## ВАРИАНТ 6

1.  $y'ax = y + a, y(1) = 0;$

2.  $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx;$

3.  $y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1, y(1) = 2;$

4.  $y - y' = y^2 + xy';$

5.  $xy'' + y' = 0;$

6.  $(y-1)y'' = 2(y')^2;$

7.  $\frac{1}{2}y'' - 5y' + 12y = 0 \quad y(0) = 1; y'(0) = 1;$

8.  $y'' - 4y' + 8y = 0;$

9.  $y'' + 2y' + y = 0;$

10.  $\frac{1}{2}y'' - 5y' + 12y = f_i(x), f_i(x) = \begin{cases} f_1 = -e^{6x}; \\ f_2 = \sin 2x; \\ f_3 = x^2 + 6x; \\ f_4 = f_1 + 2f_2 - f_3; \end{cases}$

## ВАРИАНТ 7

1.  $yy' = \frac{1-2x}{(3+x)y}$ ,  $y(0) = 0$ ;

2.  $(y^2 - 3x^2)dy = 2xydx$ ;

3.  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ,  $y(0) = e$ ;

4.  $xy' = y + \frac{x^3}{y}$ ;

5.  $x^2y'' = (y')^2$ ;

6.  $y''tgy = 2(y')^2$ ;

7.  $y'' - 4y' + 5y = 0$   $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 2$ ;

8.  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ;

9.  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ;

10.  $y'' - 4y' + 5y = f_i(x)$ ,  $f_i(x) = \begin{cases} f_1 = 3e^{-x}; \\ f_2 = \cos x; \\ f_3 = -x^2 + 1; \\ f_4 = 2f_1 - f_2 + 3f_3; \end{cases}$

## ВАРИАНТ 8

1.  $xy' + y = y^2$ ,  $y(1) = 0,5$ ;

2.  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ ;

3.  $y' = \frac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$ ,  $y(0) = 2$ ;

4.  $xy' - y = 2xy^2$ ;

5.  $y''(e^x + 1) + y' = 0$ ;

6.  $yy'' - (y')^2 = y^2$ ;

7.  $y'' + 4y' + 4y = 0$   $y(0) = 2$ ;  $y'(0) = 1$ ;

8.  $y'' + 3y' + 2y = 0$ ;

9.  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ;

10.  $y'' + 4y' + 4y = f_i(x)$ ,  $f_i(x) = \begin{cases} f_1 = -e^x; \\ f_2 = \sin 3x; \\ f_3 = 2 - x - x^2; \\ f_4 = 2f_1 - f_2 + 3f_3; \end{cases}$

## ВАРИАНТ 9

1.  $z' = 10^{x+z}$ ,  $z(0) = 1$ ;  
2.  $y^2 dx + x(x-y) dy = 0$ ;  
3.  $y' = y \operatorname{ctg} x + \sin x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ;

4.  $y' + y = xy^3$ ;

5.  $y'' = \frac{2xy'}{1+x^2}$ ;

6.  $y'' \cos y + (y')^2 \sin y - y' = 0$ ;

7.  $y'' + 9y = 0$   $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ;  $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ ;

8.  $y'' + 3y' - 4y = 0$ ;

9.  $y'' + 12y' + 36y = 0$ ;

10.  $y'' + 9y = f_i(x)$ ,  $f_i(x) = \begin{cases} f_1 = -2e^x; \\ f_2 = \cos x; \\ f_3 = 2x^2 + 1; \\ f_4 = \frac{f_1}{2} - f_2 + 3f_3; \end{cases}$

## ВАРИАНТ 10

1.  $y' = (2+y)^3 x^2$ ,  $y(0) = -1$ ;

2.  $x dy - y dx = y dy$ ;

3.  $xy' - y = xy + x^2$ ,  $y(1) = 0$ ;

4.  $(1-x^2)y' - 2xy^2 = xy$

5.  $2xy'' = y'$ ;

6.  $y'' y = y^2 + (y')^2$ ;

7.  $y'' - \frac{33}{9}y' + 2y = 0$   $y_0 = 0$ ;  $y'(0) = 1$ ;

8.  $y'' - 6y' + 5y = 0$ ;

9.  $y'' + 16y' + 64y = 0$ ;

10.  $y'' - \frac{33}{9}y' + 2y = f_i(x)$ ,  $f_i(x) = \begin{cases} f_1 = -e^{2x}; \\ f_2 = \sin 2x; \\ f_3 = 2 - x^2; \\ f_4 = -f_1 + 2f_2 - f_3; \end{cases}$