1. Ресурсная задача

Для изготовления изделий типа А и В используется сырье трех видов, запасы каждого из которых Р1 , Р2 , Р3 . На производство одного изделия типа А требуется затратить а1 кг сырья первого вида, а2 кг сырья второго вида, а 3 кг сырья третьего вида. На одно изделие типа В расходуется соответственно b1 , b 2 , b3 кг сырья каждого вида. Прибыль от реализации единицы изделия А составляет α /ден.ед./, а изделия В - β /ден.ед./. Составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации. Решить задачу симплекс-методом. Дать геометрическое истолкование задачи.

№ Варианта	Изделие типа А				Изделие типа В				Запасы сырья		
	Затраты сырья на 1 изделие			Цена 1 изделия	Затраты сырья на 1 изделие			Цена 1 изделия			
	a_1	a_2	a_3	α	b_1	b_2	b_3	β	P1	P2	P3
22	8	6	3	6	2	3	2	2	840	870	560

I способ решения

Вид сырья	Нормы затрат		Общее количество
	А	В	
1	8	2	840
2	6	3	870
3	3	2	560
Цена за 1 шт.	6	2	

Необходимо составить такой план производства, при котором общая прибыль будет максимальной.

Составим математическую модель.

Пусть x_1 - количество изделий А, x_2 – количество изделий В.

Тогда ограничения по запасам сырья:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 840 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 870 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 560 \end{cases}$$

По экономическому смыслу $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$

Составим целевую функцию (функцию прибыли):

$Z = 6x_1 + 2x_2 \to max$

Введём векторы:

$A_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Так как векторы состоят из трёх координат, то и базис будет состоять из трёх векторов.

Базисные векторы:

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Вектор по запасам:

$A_0 = \begin{pmatrix} 840 \\ 870 \\ 560 \end{pmatrix}$

Ценовой вектор:

$C_б = (6, 2, 0, 0, 0)$

Составим симплекс таблицу:

i №	базис	$C_б$	A_0	6	2	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	840	**8**	2	1	0	0
2	A_4	0	870	6	3	0	1	0
3	A_5	0	560	3	2	0	0	1
m+1 (Δ)			0	-6	-2	0	0	0
1	A_1	6	105	1	1/4	1/8	0	0
2	A_4	0	240	0	**3/2**	-3/4	1	0
3	A_5	0	245	0	5/4	-3/8	0	1
m+1 (Δ)			630	0	-1/2	3/4	0	0
1	A_1	6	**65**	1	0	1/4	-1/6	0
2	A_2	2	**160**	0	1	-1/2	2/3	0
3	A_5	0	**45**	0	0	1/4	-5/6	1
m+1 (Δ)			**710**	0	0	1/2	1/3	0

Так как в m+1 строке есть $\Delta i < 0$, то найденный план не будет оптимальным.

Необходимо найти разрешающий элемент. Для $\Delta i < 0$ находим Θ_i.

$\Delta_1 = -6 < 0$;

$\Theta_1 = \min(\frac{840}{8}, \frac{870}{6}, \frac{560}{3}) = \min(105; 145; 186{,}67) = 105$

$\Delta_1 * \Theta_1 = -6*105 = -630$;

$\Delta_2 = -2 < 0$;

$\Theta_2 = \min(\frac{840}{2}, \frac{870}{3}, \frac{560}{2}) = \min(420; 290; 280) = 280$

$\Delta_2 * \Theta_2 = -2*280 = -560$;

Находим $\min(\Delta i * \Theta_i) = \min(-630, -560) = -630$

⇨ Разрешающий элемент 8.

Исключаем из базиса A_3 и включаем A_1 и заполняем новую таблицу. Всю строку A_3 делим на разрешающий элемент, остальные элементы считаем по формуле прямоугольника.

В получившейся таблице в m+1 строке есть $\Delta i < 0$, следовательно, найденный план также не будет оптимальным. Вновь ищем разрешающий элемент:

$\Delta_2 = -1/2 < 0$;

$\Theta_2 = \min(105{:}\frac{1}{4}, 240{:}\frac{3}{2}, 245{:}\frac{5}{4}) = \min(420, 160, 196) = 160$

⇨ Разрешающий элемент 3/2.

Исключаем из базиса A_4 и включаем A_2, заполняем новую таблицу.

На третьем шаге в m+1 строке нет отрицательной Δ, следовательно, найдено оптимальное решение.

Таким образом $x_1 = 65$; $x_2 = 160$; $Z_{max} = 710$;

$Z = 6*65 + 2*160 = 710$;

Неизрасходованными остались 45 кг третьего вида сырья.

Наибольшая прибыль (710) будет получена при производстве 65 изделий типа А и 160 изделий типа В.

II способ решения (графический)

Вид сырья	Нормы затрат		Общее количество
	A	B	
1	8	2	840
2	6	3	870
3	3	2	560
Цена за 1 шт.	6	2	

Вид сырья	Нормы затрат		Общее количество
	A	B	
1	12	3	684
2	10	5	690
3	3	6	558
Цена за 1 шт.	6	2	

Пусть x_1 - количество изделий типа A, x_2 – количество изделий типа B.

Функция прибыли имеет вид:

$Z = 6x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

Ограничения по запасам сырья:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 840 & \text{I} \\ 6x_1 + 3x_2 \le 870 & \text{II} \\ 3x_1 + 2x_2 \le 560 & \text{III} \end{cases}$$

По экономическому смыслу $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$

Изобразим на плоскости X_10X_2 графики функций из системы ограничений и определим область допустимых решений.

$8x_1 + 2x_2 = 840$

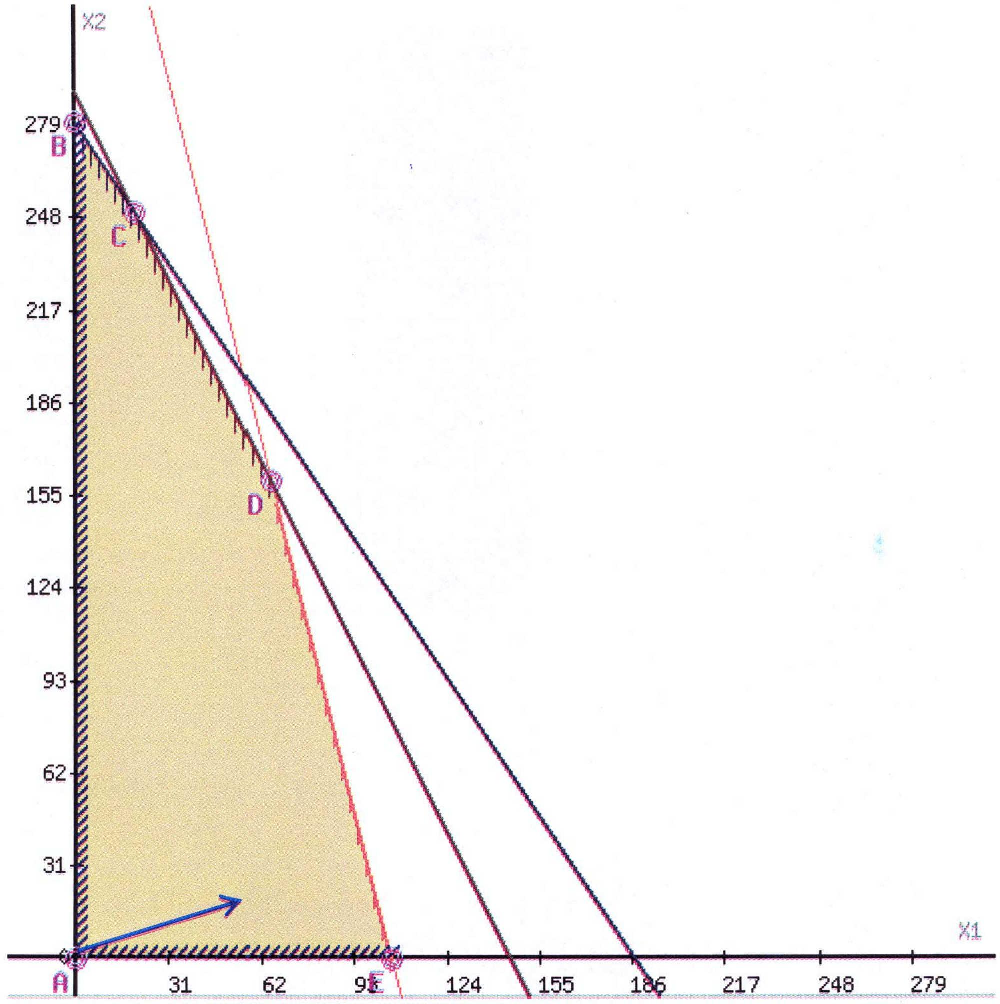
x_1	0	105
x_2	420	0

$$6x_1 + 3x_2 = 870$$

x_1	0	145
x_2	290	0

$$3x_1 + 2x_2 = 560$$

x_1	0	186,7
x_2	280	0



Таким образом, четырёхугольник ABCDE представляет собой область допустимых решений, то есть каждая точка внутри данной области удовлетворяет ограничениям.

Целевая функция $Z = 6x_1 + 2x_2$ представляет собой семейство параллельных прямых с вектором нормали $\overline{N}(6,\ 2) \sim \overline{N}(60, 20)$.

Наибольшее значение функция Z достигнет в наиболее удалённой от начала координат по направлению вектора $\overline{N}$ точке.

В нашем случае это точка D. Найдём её координаты:

D = (I)∩(II)

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 = 840 \\ 6x_1 + 3x_2 = 870 \end{cases}$$

$x_1=65$; $x_2=160$;

B(65,160)

$Z_{max}=Z(B)=Z(65,160)=6*65+2*160=710$

Наибольшая прибыль (710) будет получена при производстве 65 изделий типа A и 160 изделий типа B.

2. Транспортная задача

Имеются 3 пункта поставки однородного груза A1 , A2 , A3 и 5 пунктов потребления этого груза B1 , B2 , B3 , B4 , B5 . На пунктах AI (I = 1,2,3) груз находится соответственно в количествах a1 , a 2 , a 3 условных единиц. В пункты B_J (J= 1,2,3,4,5) требуется доставить соответственно b_J единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из A_I в B_J определена матрицей C={c ij }. Решить задачу тремя методами (северо-западного угла, минимальной стоимости и методом Фогеля) и найти такой план закрепления потребителей и поставщиков, чтобы общие затраты на перевозки были минимальны.

22 Вариант

$a_1= 300$, $a_2 = 260$, $a_3= 230$,

$b_1= 140$, $b_2 = 250$, $b_3= 150$,

$b_4 = 160$, $b_5= 90$;

$$C=\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 5 & 10 & 7 & 11 & 6 \\ 7 & 13 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Метод северо-западного угла

Последовательно заполним таблицу, начиная с клетки A_1B_1 двигаясь по диагонали и доходя до клетки A_3B_5:

Куда / Откуда	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	9 140	7 160	6	8	5	300
A_2	5	10 90	7 150	11 20	6	260
A_3	7	13	5	6 140	3 90	230
Потребности	140	250	150	160	90	790

Найдём затраты на перевозку:

$Z_1 = 140*9+160*7+90*10+150*7+20*11+140*6+90*3 = 5660$ (рублей).

Данный метод не будет оптимальным, так как при заполнении таблицы не были использованы тарифы на перевозки.

Метод минимальной стоимости

Метод заключается в последовательном заполнении самых дешевых клеток. Заполнение таблицы начнём с клетки A_1B_5:

Куда / Откуда	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	9	7 250	6 10	8 40	5	300
A_2	5 140	10	7	11 120	6	260
A_3	7	13	5 140	6	3 90	230

Потребности	140	250	150	160	90	790

$Z_2 = 250*7+140*5+10*6+140*5+40*8+120*11+90*3 = 5120$ (рублей)

Вывод: $Z_1 > Z_2$, следовательно план Z_2 выгоднее.

Метод Фогеля

Куда / Откуда	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы	ΔC_{ij}
A_1	9	7 250	6 30	8 20	5	300	1,1,2,2,2
A_2	5 140	10	7 120	11	6	260	1,1,2,4
A_3	7	13	5	6 140	3 90	230	2,2,1,1,1
Потребности	140	250	150	160	90	790	
ΔC_{ij}	2, 2, 2	3	1,1,1,1,1	2,2,2,2,2	2,2		

Найдём затраты на перевозку:

$Z_3 = 140*5+250*7+30*6+120*7+20*8+140*6+90*3 = 4740$ (рублей)

Вывод: $Z_3 < Z_2$, то есть план Z_3, составленный по методу Фогеля, является более выгодным.

Найдём оптимальный план транспортной задачи методом потенциалов. Самым выгодным является план, найденный по методу Фогеля. Проверим его на оптимальность.

n=3, m=5, где n – количество пунктов отправления, а m - количество пунктов назначения. Заполненных клеток должно быть n+m-1=3+5-1=7

Составим систему потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 7 \\ u_1 + v_3 = 6 \\ u_2 + v_4 = 8 \\ u_2 + v_1 = 5 \\ u_2 + v_3 = 7 \\ u_3 + v_4 = 6 \\ u_3 + v_5 = 3 \end{cases}$$

Пусть $u_1 = 0$, тогда:

$u_2 = 1$, $u_3 = -2$, $v_1 = 4$, $v_2 = 7$, $v_3 = 6$, $v_4 = 8$, $v_5 = 5$

Все свободные клетки проверяем на выполнение неравенства:

$u_i + v_j \leq c_{ij}$

Это правило выполняется во всех свободных клетках, следовательно, найденный план является оптимальным.