

**МОДУЛЬНЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ**

Владимир 2012

УДК 330.4

ББК 65.26в631

К 76

Рецензенты:

Доктор экономических наук, профессор кафедры экономики предприятия и предпринимательства Всероссийского заочного финансово-экономического института, заслуженный экономист РФ, член-корреспондент РАЕН

Л.К. Корецкая

Доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Прикладная математика» ФГБОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

В.Ю. Попов

Печатается по решению редакционного совета ВлГУ

Кошкин. В.Л.

Финансовая математика (Теория и практика финансовых вычислений):

К76 учебное пособие / В.Л. Кошкин, А.М. Губернаторов; Владим. гос. ун-т. имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012.- 192.
ISBN 978-5-9984-0244-9

Методическая разработка предназначено для студентов Владимирского государственного университета, представляет собой ряд многовариантных задач по финансовой математике, рекомендации по решению, примеры с решениями по каждому разделу.

УДК 330.4

ББК 65.26в631

ISBN 978-5-9984-0244-9

© ВлГУ, 2012

© Кошкин В.Л., Губернаторов А.М., 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Финансовые взаимоотношения в современном обществе пронизывают все сферы человеческой деятельности. Умение грамотно провести анализ, сравнить различные финансовые ситуации, рассчитать доход и убыток в определённой ситуации необходимо на сегодняшний день каждому бухгалтеру, банковскому работнику и всякому человеку, посвятившему себя финансовой деятельности.

В настоящее время происходит значительное увеличение интереса к различного рода финансовой деятельности. Вместе с тем, уровень расчётов в этой области недостаточно высок. Это относится, в первую очередь, к тем областям, где такие расчёты производятся при анализе платежей, распределённых по времени или составляющих последовательности повторяющихся выплат. Следует отметить, что в современном обществе появились такие новые финансовые инструменты как ценные бумаги, векселя и т. д., для успешной работы с которыми требуется точное определение их рыночной цены. Основная масса начинающих финансовых работников довольно слабо информирована о многообразии способов получения и использования процентных денег. В то же время, интенсивное внедрение компьютерной техники позволяет существенным образом упростить и ускорить выполнение финансовых расчётов. Так, например, в пакете Excel для этой цели предусмотрен большой набор финансовых мастер-функций. В связи с этим возрастают современные требования к подготовке специалистов по математическим методам в экономике, овладение которыми требует знаний элементов финансовой математики.

Курс «Финансовая математика (Теория и практика финансовых вычислений)» является практическим руководством для обучения студентов разрешать вопросы, связанные с основами управления финансами в конкретных жизненных ситуациях. Данное пособие предлагает систематизированное изложение основных понятий методов финансовых вычислений.

В пособии рассматриваются основные понятия, которыми оперируют в практической деятельности, такие как процент, ставка процента, учетная ставка, современная (текущая) стоимость платежей и т.д., методы наращивания и дисконтирования платежей, принципы, лежащие в основе финансовых вычислений, современная практика расчетов.

В настоящее учебное пособие вошли также основы количественного анализа потоков платежей, в частности, - финансовых рент (аннуитетов). Потоки денежных платежей часто встречаются в практике. Например, регулярные взносы для формирования какого-либо фонда (инвестиционного, страхового, пенсионного, для погашения долга), периодическая уплата процентов, доходы по облигациям и ценным бумагам, выплата пенсий,

поступление доходов от коммерческой или предпринимательской деятельности, налоговые платежи и т.д. Такие методы имеют важное значение в практике финансовых расчетов и позволяют определить как обобщающие характеристики рент (например, сумму, текущую стоимость), так и отдельные их параметры.

Материал пособия имеет общий характер и является базой для ряда дисциплин. Он может быть применен в расчетах любых финансовых операций: в финансовом менеджменте, в страховом деле, в анализе инвестиционных проектов, расчете кредитных и коммерческих операций, эффективности предпринимательской деятельности и т.д.

Модуль 1. Простые проценты

1.1. Простая процентная ставка.

Проценты называются простыми, если за базу их начисления берется только первоначальная сумма.

Пример 1.1. Банк начисляет на вклад 10000 руб. 20% годовых по ставке простых процентов. Найти сумму на счете через 1 год, 2 года, 3 года, ..., n лет.

Решение:

Через 1 год на счете будет денег на 20% больше: $10000 \cdot (1 + 0,20) = 12000$ (руб.);
через 2 года на счете будет: $10000 \cdot (1 + 0,20) + 2000 = 14000$ (руб.);
через 3 года на счете будет: $10000 \cdot (1 + 0,20) + 4000 = 16000$ (руб.).

Эти данные можно записать следующим образом:

1 год – 12000 руб. = $10000 \cdot (1 + 1 \cdot 0,20)$ руб.

2 года – 14000 руб. = $10000 \cdot (1 + 2 \cdot 0,20)$ руб.

3 года – 16000 руб. = $10000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,20)$ руб.

n лет – сумма на счете = $10000 \cdot (1 + n \cdot 0,20)$ руб.

Формула для вычисления простой процентной ставки имеет вид:

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i), \quad (1.1)$$

где

S – сумма на счете (наращенная сумма);

P – первоначальная сумма;

n – срок пользования кредитом, в годах;

i – простая процентная ставка.

Если раскрыть скобки формула приобретает вид:

$$S = P + P \cdot n \cdot i = P + I, \quad (1.2)$$

где

$I = P \cdot n \cdot i$ – процентные деньги (Interest).

Наращенная сумма всегда равна первоначальной сумме плюс процентные деньги.

Пример 1.2. Кредит 20 000 руб. выдан на 6 месяцев под 24% годовых, начисляемых по простой процентной ставке. Вычислите возвращаемую сумму.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$P = 20\,000$ руб. $n = 0,5$ лет $i = 24\% = 0,24$	$S = P \cdot (1 + n \cdot i) = 20\,000 \cdot (1 + 0,5 \cdot 0,24) = 22\,400$ (руб.)
$S = ?$	Ответ: 22 400 руб.

Обычно простая процентная ставка используется для случаев $n < 1$ (краткосрочные кредиты).

Если срок пользования кредитом задается двумя календарными датами, день выдачи и день погашения, то формула приобретает вид:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{\partial}{K} \cdot i \right), \quad (1.3)$$

где

∂ – срок кредита в днях (день выдачи и день погашения кредита считается за один день).

K – количество дней в году.

Пример 1.3. Кредит 20 000 руб. выдан 17 февраля 2000 г. под 30% годовых, начисляемых по простой процентной ставке. Найти возвращаемую сумму, если день погашения кредита 20 декабря 2000 г.

Решение по формуле (1.3) возможно с применением 3^х методик, каждая из которых дает различный результат.

1) «Германская методика».

В каждом месяце 30 дней, а в году 360 дней ($30 \cdot 12 = 360$). Подсчет дней кредита производится по следующей схеме:

13 дней + март + апрель + май + июнь + июль + август + сентябрь + октябрь + ноябрь + 20 дней = $(13 + 9 \cdot 30 + 20)$ дней = 303 дня.

$K = 360$ дней.

$$S = 20000 \left(1 + \frac{303}{360} \cdot 0,30 \right) = 25050 \text{ руб.}$$

Данная методика считает приближенное значение дней пользования кредитом, поэтому говорят о вычислении «обычных процентов» (Ordinary Interest). Применяется в Германии, Дании, Швеции.

2) «Английская методика».

Дни считаются точно по календарной или специальной таблице (см. приложение 1)

17 февраля – 48 день года

20 декабря – 355 день года (год високосный)

$$\partial = 355 - 48 = 307 \text{ дней}$$

$K = 366$ дней (год високосный)

По формуле $\left(1 + \frac{307}{366} \cdot 0,30\right)$ говорят о вычислении точного процента (Exact Interest). Применяется в Англии, США, Португалии и др. странах.

3) «Французская методика»

Дни считаются как в английской методике, а количество дней в году по германской, т.е. $K = 360$ дней.

$$S = 20000 \left(1 + \frac{307}{360} \cdot 0,30 \right) = 25116,67 \text{ руб.}$$

Применяется во Франции, Швейцарии, Испании, Югославии и др. странах.

Так как разные методики дают различные результаты, то при заключении сделок необходимо оговаривать, по какой методике производится расчет. Очевидно, что самая выгодная для кредитора – "Французская методика".

1.2. Простая учетная ставка.

Используется в том случае, когда за базу начисления процентов берется наращенная сумма (S). Обозначается буквой d , широко применяется в финансовых расчетах, например, при оформлении векселей.

Вексель – письменное долговое обязательство строго установленной формы, выдаваемое заемщиком (векселедателем) кредитору (векселедержателю) и предоставляющее последнему беспорное право требовать с заемщика уплаты к определенному сроку (день погашения векселя) определенной суммы денег, указанной в векселе (номинальной стоимости векселя).

Вексель имеет следующие особенности:

1) абстрактность, т.е. отсутствия каких – либо объяснений по поводу возникновения долга;

2) беспспорность, т.е. обязательность оплаты в точном соответствии с данным векселем;

3) обращаемость, т.е. вексель посредством передаточной надписи может обращаться среди неограниченного количества клиентов.

Вексель можно купить (продать) в любом финансовом учреждении до срока, указанного на нем, но по цене ниже номинальной. В таких случаях говорят, что вексель реализован с дисконтом.

Дисконт (Д) – это разница между номинальной стоимостью векселя (S) и суммой (P), полученной владельцем векселя в финансовом учреждении при его учете.

Для одного года: $S - P = D = S \cdot d$

Для n лет: $S - P = S \cdot n \cdot d$

Отсюда: $P = S \cdot (1 - n \cdot d)$,

где

n – срок между днем погашения и днем учета в годах.

Более удобная формула выглядит следующим образом:

$$P = S \cdot \left(1 - \frac{\partial}{K} \cdot d \right) \quad (1.4)$$

Пример 1.4 Владелец векселя номинальной стоимостью 20 000 руб. со сроком погашения 27 декабря 2000 г. собирается реализовать его в банке 20 октября 2000 года. Банк согласен учесть вексель с дисконтом 30%. Вычислить сумму, которую получит в банке владелец векселя.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$S = 20\,000$ руб. 20 окт. (294) – день учета векселя 27 дек. (362) – день погашения векселя $d = 30\% = 0,30$ $K = 360$ дней	$\partial = 362 - 294 = 68$ дней $P = 20000 \cdot \left(1 - \frac{68}{360} \cdot 0,30 \right) = 18866,67$ руб. $D = 20000 - 18866,67 = 1133,33$ руб. – заработок банка
$P = ?$ $D = ?$	Ответ: Владелец векселя получит в банке 20 октября 2000 г. – 18 866,67 рублей; Банк получит от векселедателя 20 000 рублей 27 декабря 2000 г.; Дисконт 1 133,33 рублей.

Пример 1.5 Магазин 14 сентября оптом получает от предпринимателя партию товара общей стоимостью 200 000 рублей на следующих условиях: 40% стоимости оплачивается сразу, а остальное после реализации товара 5

декабря того же года. На какую сумму должен магазин выписать вексель, чтобы предприниматель не потерпел убытков, если банк учитывает векселя по простой процентной ставке 30% годовых.

Предварительное решение: 14 сентября предприниматель получит от магазина – $0,4 \cdot 200\,000$ руб. = 80 000 рублей, остальные 120 000 рублей – кредит под 30% годовых начисляемых по простой учетной ставке.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$P = 120\,000$ руб. 14 сентября – 257 день года 5 декабря – 339 день года $d = 0,30$ $K = 360$ дней $P = ?$	$\partial = 339 - 257 = 82 \text{ дня}$ $S = \frac{P}{1 - \frac{\partial}{K} \cdot d} = \frac{120000}{1 - \frac{82}{360} \cdot 0,30} = 128801,43 \text{ руб.}$ Ответ: магазин 14 сентября платит предпринимателю 80000 рублей и выписывает вексель на сумму 128801,43 рубля. Предприниматель по векселю стоимостью 128801,43 рубля 14 сентября получает 120000 рублей, т.е. за партию предприниматель получает сразу 80000 рублей в магазине и 120000 рублей в банке. Банк получает 5 декабря дисконт $128801,43 - 120000 = 8801,43$ руб.

Модуль 2. Сложные проценты

Сложные проценты используется в финансово – кредитных операциях, где проценты не выплачиваются сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их начисления, называют капитализацией процентов.

2.1. Наращение по сложным процентам.

Пример 2.1. Банк начисляет на вклад 10000 рублей 20% годовых по ставке сложных процентов. Найти сумму на счете через 1 год, 2 года, 3 года, ..., n лет.

Решение:

Через 1 год на счете будет денег на 20% больше: $10000 \cdot (1 + 0,20) = 12000$ (руб.);
через 2 года на счете будет $12000 \cdot (1 + 0,20) = 10000 \cdot (1 + 0,20)^2 = 14400$ (руб.);
через 3 года на счете будет $14400 \cdot (1 + 0,20) = 10000 \cdot (1 + 0,20)^3 = 17280$ (руб.):

Отсюда формула для начисления ставки сложных процентов имеет вид:

$$S = P \cdot (1 + i)^n, \quad (2.1)$$

где

S – сумма на счете (наращенная сумма);

P – первоначальная сумма;

n – срок пользования кредитом, в годах;

i – ставка сложных процентов.

2.2. Начисление сложных процентов при дробном количестве лет.

Пример 2.2. Банк начисляет на вклад 10000 рублей 20% годовых по ставке сложных процентов. Найти сумму на счете через 2,5 года.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$P = 10000$ руб. $n = 2,5$ лет $i = 20\% = 0,20$	1) Математический метод: $S = 10000 \cdot (1 + 0,20)^{2,5} = 15774,41$ (руб.) 2) Банковский метод: $S = 10000 \cdot (1 + 0,20)^2 \cdot (1 + 0,5 \cdot 0,2) = 15840$ (руб.)
$S = ?$	Ответ: 1) 15774,41 руб. 2) 15840 руб.

2^й способ более употребительный и в общем виде формула выглядит следующим образом:

$$S = P \cdot \left(1 + i\right)^{n_0} \cdot \left(1 + n \cdot l\right) \quad (2.2)$$

где

$$n = n_0 + l,$$

n_0 – целая часть;

l – дробная часть срока пользования кредита в годах.

Пример 2.3. Вклад в банк 10000 рублей под 20% годовых по ставке сложных процентов. Найти сумму на счете через 3 года 5 месяцев.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$P = 10000$ руб. $n_0 = 3$ лет $i = 20\% = 0,20$ $l = 5/12$ года	$S = P \cdot \left(1 + i \cdot n_0 + n \cdot l\right) = 10000 \cdot \left(1 + 0,20 \cdot 3 + \frac{5}{12} \cdot 0,20\right) = 18720$ рублей.
$S = ?$	Ответ: 18720 рублей.

2.3. Номинальная процентная ставка. **Начисление процентов несколько раз в году.**

Пример 2.4. Вклад в банк 10000 рублей под 20% годовых при ежеквартальном начислении процентов. Найти сумму на счете через 2 года.

Решение:

Количество интервалов $m = 4$ (в году 4 квартала). На каждом интервале действует ставка:

$$\frac{j}{m} = \frac{20\%}{4} = 5\% = 0,05,$$

где

$j = 20\%$ - номинальная годовая ставка.

Количество периодов начисления $j = 4 \cdot 2 = 8$ ($m \cdot n$ – количество кварталов)

$$S = 10000 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^{4 \cdot 2} = 14774,55 \text{ руб.}$$

В общем виде формула выглядит следующим образом:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}, \quad (2.3)$$

где

P – первоначальная сумма;

j – номинальная процентная ставка;

m – число периодов начисления процентов в году;

n – срок в годах.

Пример 2.5. Кредит 25000 рублей выдан на 1,5 года под 20% годовых при ежемесячном начислении процентов. Найти возвращаемую сумму.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$P = 25000$ руб.	$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{12 \cdot m}\right)^{m \cdot n} = 25000 \cdot \left(1 + \frac{0,20}{12}\right)^{12 \cdot 1,5} = 33663,13$ рублей.

$n = 1,5$ лет $m = 12$ $j = 20\% = 0,20$ $S = ?$	Ответ: 33663,13 рублей.
---	-------------------------

2.4. Начисление процентов несколько раз в году при дробном количестве периодов начисления.

На практике срок пользования кредитом далеко не всегда представляется целым числом периодом начисления процентов. В этом случае используется формула:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{n_0} \cdot \left(1 + l \cdot \frac{j}{m}\right), \quad (2.4)$$

где

n_0 – целая часть, а l – дробная часть цикла периодов начисления.

Пример 2.6 Кредит в размере 50000 рублей выдан под 20% годовых, проценты начисляются ежеквартально. Какую сумму должен заплатить заемщик через 2 года и 7 месяцев?

Дано:

$P = 50000$ руб.
 $n = 2$ года 7 месяцев
 $m = 4$
 $j = 20\% = 0,20$

$S = ?$

Решение:

2 года 7 месяцев = $10\frac{1}{3}$ квартала

$n_0 = 10; l = \frac{1}{3}$

$$S = 50000 \cdot \left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0.20}{4}\right) = 82802,42 \text{ рублей}$$

Ответ: 82802,42 рублей.

2.5. Непрерывное начисление процентов.

В формуле (2.3): $S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$,

где

$m = 2$, начисление процентов по полугодиям.

$m = 4$, начисление процентов по кварталам.

$m = 12$, начисление процентов по месяцам.

Все указанные выше случаи – дискретное начисление процентов.

В мировой практике встречается и непрерывное начисление процентов ($m \rightarrow \infty$).

В этом случае:

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = P \cdot e^{j \cdot n}, \quad (2.5)$$

где

$e \approx 2,718\dots$ - основание натуральных логарифмов.

Пример 2.7. Кредит 30000 рублей был выдан на 2 года под 20% годовых при непрерывном начислении процентов. Найти возвращаемую сумму.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$P = 30000$ руб. $n = 2$ года $m \rightarrow \infty$ $j = 20\% = 0,20$ $S = ?$	$S = P \cdot e^{j \cdot n} = 30000 \cdot e^{0,2 \cdot 2} = 44754,74$ рублей Ответ: 44754,74 рублей.

2.6. Эффективная годовая процентная ставка.

Эффективная годовая процентная ставка (i_e) – это простая процентная ставка, которая начисляется за 1 год и дает такой же результат, что и ставка сложных процентов « j », начисляемая « m » раз в году. Из определения следует:

$$P \cdot (1 + i_e) = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot 1};$$

отсюда:

$$i_e = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \quad (2.6)$$

Эффективная годовая процентная ставка используется для выявления наиболее благоприятных условий для вкладов в банки и получения кредитов.

Пример 2.8. Банки предлагают следующие условия для вкладов:

1^й банк – 36% годовых начисляемых по полугодиям ($j = 0,36$; $m = 2$),

2^й банк – 35% годовых начисляемых по кварталам ($j = 0.35$; $m = 4$),
 3^й банк – 34% годовых начисляемых ежемесячно ($j = 0.34$; $m = 12$).
 Какой банк предлагает наилучшие условия для вкладов?

Решение данной задачи заключается в нахождении эффективной годовой процентной ставки (i_e) для каждого банка. Где она выше, там условия для вкладов лучше.

1) Для 1^{го} банка: $i_e = \left(1 + \frac{0.36}{2}\right)^2 - 1 = 0.3924 = 39.24\%$

2) Для 2^{го} банка: $i_e = \left(1 + \frac{0.35}{4}\right)^4 - 1 = 0.3987 = 39.87\%$

3) Для 3^{го} банка: $i_e = \left(1 + \frac{0.34}{12}\right)^{12} - 1 = 0.3983 = 39.83\%$

Самая высокая эффективная, годовая процентная ставка 39,87%, у 2^{го} банка, т.е. значит, он предлагает самые выгодные условия для вкладов.

Пример 2.9. Первый банк дает кредит под 30% годовых при ежеквартальном начислении процентов. Второй банк дает кредит под 29% годовых при ежемесячном начислении процентов. В каком банке выгоднее взять кредит?

Решение:

Кредит выгоднее взять в том банке, где эффективная годовая процентная ставка ниже.

1) Для 1^{го} банка: $i_e = \left(1 + \frac{0.30}{4}\right)^4 - 1 = 0.3355 = 33,55\%$

2) Для 2^{го} банка: $i_e = \left(1 + \frac{0.29}{12}\right)^{12} - 1 = 0.3318 = 33,18\%$

Ответ: Кредит выгоднее взять во втором банке.

2.7. Расчет срока кредита и процентных ставок.

Рассмотрим формулы, используемые для решения задач такого типа на двух примерах.

Пример 2.10. За какой срок первоначальный капитал в 50000 рублей увеличится до 70000 рублей, если на него начисляется 25% годовых:

- начисление процентов по простой ставке;
- начисление процентов по ставке сложных процентов;
- начисление процентов ежемесячно ($m=12$).

Решая данную задачу, выведем три формулы.

Решение:

а) Для простых процентов

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i)$$

$$S = P + P \cdot n \cdot i;$$

$$P \cdot n \cdot i = S - P$$

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i} \quad (2.7)$$

Формула для подсчета срока кредита в годах, если нужно срок вычислить в днях, то:

$$n = \frac{\partial}{K};$$

$$\frac{\partial}{K} = \frac{S - P}{P \cdot i};$$

$$\partial = \frac{K \cdot (S - P)}{P \cdot i} \quad (2.8)$$

Дано:

P = 50000 руб.

S = 70000 руб.

i = 25% = 0,25

n = ?

Решение:

$$n = \frac{70000 - 50000}{50000 \cdot 0.25} = 1.60 \text{ (лет)}$$

Ответ: а) 1,60 лет.

б) для сложных процентов:

$$S = P \cdot (1 + i)^n;$$

$$\frac{S}{P} = (1 + i)^n;$$

От обеих частей берем десятичный логарифм:

$$n \cdot \lg (1 + i) = \lg \frac{S}{P};$$

$$n = \frac{\lg \frac{S}{P}}{\lg (1 + i)} \quad (2.9)$$

$$n = \frac{\lg \left(\frac{70000}{50000} \right)}{\lg (1 + 0.25)} = 1.508 \text{ (лет)}$$

Ответ : б) 1,508 лет.

с) Для сложных процентов при начислении процентов « m » раз в году.

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m \cdot n};$$

$$n = \frac{\lg \frac{S}{P}}{m \cdot \lg \left(1 + \frac{j}{m} \right)}$$

(2.10)

$$n = \frac{\lg\left(\frac{70000}{50000}\right)}{12 \cdot \lg\left(1 + \frac{0.25}{12}\right)} = 1.36 \text{ (лет)}$$

Ответ : с) 1,36 лет.

Пример 2.11. Какова должна быть процентная ставка, чтобы первоначальный капитал 40000 рублей достиг 55000 рублей за 2 года? Решить данную задачу для случаев:

- а) Проценты простые;
- б) Проценты сложные;
- с) Начисление процентов ежемесячное.

Решение:

- а) Для простых процентов:

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i);$$

$$S = P + P \cdot n \cdot i;$$

$$P \cdot n \cdot i = S - P;$$

$$i = \frac{S - P}{P \cdot n}. \quad (2.11)$$

Если срок определить в днях то, заменив "n" на " $\frac{\partial}{K}$ " получим :

$$i = \frac{S - P}{P \cdot \frac{\partial}{K}} \quad (2.12)$$

Дано:

P = 40000 руб.

S = 55000 руб.

n = 2 года

i = ?

Решение:

$$i = \frac{40000 - 55000}{40000 \cdot 2} = 0.1875 = 18.75\%$$

Ответ: а) 18.75%.

- б) Для сложных процентов:

$$S = P \cdot (1 + i)^n;$$

$$(1 + i)^n = \frac{S}{P};$$

$$1 + i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}};$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 \quad (2.13)$$

с) Начисление процентов « m » раз в году:

$$\begin{aligned} S &= P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}; \\ \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} &= \frac{S}{P}; \\ 1 + \frac{j}{m} &= \sqrt[m \cdot n]{\frac{S}{P}}; \\ \frac{j}{m} &= \sqrt[m \cdot n]{\frac{S}{P}} - 1; \\ j &= m \cdot \left(\sqrt[m \cdot n]{\frac{S}{P}} - 1\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$j = 12 \cdot \left(\sqrt[24]{\frac{55000}{40000}} - 1\right) = 0.1603 = 16.03\%$$

Ответ : с) 16,03%.

2.5. Понятие инфляции.

Инфляция – это процесс обесценивания национальной валюты, т.е. снижения ее покупательной способности и общего повышения цен в стране.

Инфляция по-разному влияет на участников кредитного соглашения. Кредитор может потерять часть своего дохода из-за обесценивания денежных средств. Заемщик наоборот выигрывает, т.к. может погасить задолженность денежными средствами сниженной покупательной способности.

Рассмотрим процесс влияния инфляции на результат финансовых операций.

Один из параметров, характеризующих инфляцию, – это уровень инфляции за год α . Он показывает на сколько процентов за год из-за инфляции вырастут цены.

Если L – первоначальная цена товара, то

$$\begin{aligned} \text{через 1 год цена будет } L \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right); \\ \text{через 2 года} \quad \rightarrow \quad L \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^2; \\ \text{-----} \end{aligned}$$

$(1 + \alpha)^n = I_a$ – индекс инфляции. Он показывает, во сколько раз выросли цены на товары из-за инфляции за рассматриваемый период.

Отметим, что индекс инфляции вычисляется по формулам, похожим на формулы сложных процентов. Если рассматриваемый период не является целым числом, т.е. $n = n_0 + l$, где n_0 – целое число лет, а l – дробное, то:

$$I_a = (1 + \alpha)^{n_0} \cdot (1 + l \cdot \alpha)$$

Пример 4.1. Уровень инфляции 23%. Найти индекс инфляции за 7 месяцев.

Дано:

$$\begin{aligned} n_0 &= 0 \\ l &= 7/12 \\ \alpha &= 23\% = 0,23 \end{aligned}$$

$$I_a = ?$$

Решение:

$$I_a = (1 + 0.23)^0 \cdot \left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0.23\right) = 1.1341$$

Ответ: это означает, что в среднем цены за 7 месяцев вырастут на 13,41%.

2.5.1. Простая процентная ставка с учетом инфляции.

При использовании простых процентов применяется формула:

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i)$$

где

S - наращенная сумма без учета инфляции;

S_a - наращенная сумма с учетом инфляции (уровень α);

P - первоначальная сумма;

n - срок кредита в годах;

i - простая процентная ставка без учета инфляции (реальная доходность);

i_a - простая процентная ставка с учетом инфляции.

Учесть инфляцию можно двумя способами:

$$1) S_a = P \cdot (1 + n \cdot i_a)$$

$$2) S_a = P \cdot (1 + n \cdot i) \cdot I_a;$$

Так как результат один и тот же, то

$$P \cdot (1 + n \cdot i_a) = P \cdot (1 + n \cdot i) \cdot I_a;$$

$$1 + n \cdot i_a = (1 + n \cdot i) \cdot I_a;$$

$$n \cdot i_a = (1 + n \cdot i) \cdot I_a - 1;$$

$$i_{\alpha} = \frac{\llbracket + n \cdot i \rrbracket I_a - 1}{n} \quad (2.15)$$

Пример 4.2. Кредит 50000 рублей выдан на 6 месяцев. Какова должна быть простая процентная ставка, если кредитор желает получить 10% реальной доходности, начисляемых по простой процентной ставке при уровне инфляции 20% в год? Вычислить наращенную сумму.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$n = 0,5$ лет $P = 50000$ руб. $\alpha = 20\% = 0,20$ $i = 10\% = 0,10$	Способ первый $I_a = \llbracket + 0,5 \cdot 0,20 \rrbracket = 1,1$ $i_{\alpha} = \frac{\llbracket + 0,5 \cdot 0,10 \rrbracket 1,1 - 1}{0,5} = 0,31$ $S_{\alpha} = P \cdot \llbracket + n \cdot i_{\alpha} \rrbracket = 50000 \cdot \llbracket + 0,5 \cdot 0,10 \rrbracket = 57750 \text{ руб.}$ Способ второй $S = P \cdot \llbracket + n \cdot i \rrbracket I_a = 50000 \cdot \llbracket + 0,5 \cdot 0,10 \rrbracket 1,1 = 57750 \text{ руб.}$ Ответ: 57750 рублей.
$i_a = ?$ $S_a = ?$	

Существуют задачи и другого типа, связанные с инфляцией.

Пример 4.3. Кредит выдан на 2 года под 30% годовых, начисляемых по простой процентной ставке. Оценить реальную доходность данной финансовой операции с точки зрения кредитора. Уровень инфляции равен 25% в год.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$n = 2$ года $\alpha = 25\% = 0,25$ $i_a = 30\% = 0,30$	$I_a \cdot \llbracket + n \cdot i \rrbracket = 1 + n \cdot i_{\alpha}; \quad 1 + n \cdot i = \frac{1 + n \cdot i_{\alpha}}{I_a}; \quad n \cdot i = \frac{1 + n \cdot i_{\alpha} - I_a}{I_a}$ $i = \frac{n \cdot i_{\alpha} + 1 - I_a}{n \cdot I_a} \quad (4.1)$ $\Rightarrow I_a = \llbracket + 0,25 \rrbracket^2 = 1,25^2$ $i = \frac{2 \cdot 0,3 + 1 - 1,25^2}{2 \cdot 1,25^2} = 0,012 = 1,2\%$ Ответ: реальная доходность 1,2% годовых, начисляемых по простой процентной ставке.
$i = ?$	

2.5.2. Простая учетная ставка с учетом инфляции.

Формула для простой учетной ставки следующая:

$$P = S \cdot (1 - n \cdot d)$$

Учесть инфляцию можно двумя способами:

$$1) S_{\alpha} = \frac{P}{1 - n \cdot d_{\alpha}} \quad 2) S_{\alpha} = \frac{P}{1 - n \cdot d} \cdot I_{\alpha}$$

Так как результат один и тот же, то

$$\frac{P}{1 - n \cdot d_{\alpha}} = \frac{P}{1 - n \cdot d} \cdot I_{\alpha};$$

$$\frac{1}{1 - n \cdot d_{\alpha}} = \frac{I_{\alpha}}{1 - n \cdot d};$$

$$1 - n \cdot d_{\alpha} = \frac{1 - n \cdot d}{I_{\alpha}};$$

$$n \cdot d_{\alpha} - 1 = \frac{n \cdot d - 1}{I_{\alpha}};$$

$$n \cdot d_{\alpha} = \frac{n \cdot d - 1}{I_{\alpha}} + 1;$$

$$n \cdot d_{\alpha} = \frac{n \cdot d + I_{\alpha} - 1}{I_{\alpha}};$$

$$d_{\alpha} = \frac{n \cdot d + I_{\alpha} - 1}{n \cdot I_{\alpha}}. \quad (4.2)$$

Пример 4.4. Под какую простую учетную ставку нужно выдать кредит на 6 месяцев, чтобы реальность доходность операции составила 10% при уровне инфляции 20% в год?

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$n = 0,5$ лет $\alpha = 20\% = 0,20$ $d = 10\% = 0,10$	$I_{\alpha} = (1 + 0,5 \cdot 0,2) = 1,1$ $d_{\alpha} = \frac{0,5 \cdot 0,10 + 1,1 - 1}{0,5 \cdot 1,1} = 0,2727 = 27,27\%$
$d_a = ?$	Ответ: 27.27%.

Пример 4.5. Ссуда дана по учетной ставке 30% годовых на 6 месяцев. Какова реальная доходность операции с точки зрения кредитора при уровне инфляции 25%?

Дано:

$n = 0,5$ лет
 $\alpha = 25\% = 0,25$
 $d_a = 30\% = 0,30$

Решение:

$$\frac{1}{1 - n \cdot d_\alpha} = \frac{I_\alpha}{1 - n \cdot d}; \quad \frac{1 - n \cdot d}{I_\alpha} = 1 - n \cdot d_\alpha; \quad n \cdot d - 1 = I_\alpha \cdot (n \cdot d_\alpha - 1)$$

$$d = \frac{I_\alpha \cdot (n \cdot d_\alpha - 1) + 1}{n} \quad (4.3)$$

$$I_\alpha = (1 + 0,5 \cdot 0,25) = 1,125$$

$$d = \frac{1,125 \cdot (0,5 \cdot 0,30 - 1) + 1}{0,5} = 0,0875 = 8,75\%$$

$d = ?$

Ответ: 8.75%.

2.5.3. Сложная процентная ставка с учетом инфляции.

Пример 4.6. Кредит в размере 40000 рублей выдан на два года. Реальная доходность должна составить 10% годовых, начисляемых ежеквартально. Ожидаемый уровень инфляции 20% в год.

Определить сложную ставку процентов кредита, компенсирующую инфляционные потери, и вычислить наращенную сумму.

Дано:

$P = 40000$ руб.
 $n = 2$ года
 $\alpha = 20\% = 0,20$
 $j = 10\% = 0,10$
 $m = 4$

Решение:

Учесть инфляцию можно двумя способами:

$$1) S_{\alpha} = P \cdot \left(1 + \frac{j_{\alpha}}{m}\right)^{m \cdot n} ; 2) S_{\alpha} = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \cdot I_{\alpha}$$

Так как результат одинаковый, то:

$$P \cdot \left(1 + \frac{j_{\alpha}}{m}\right)^{m \cdot n} = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \cdot I_{\alpha};$$

$$\left(1 + \frac{j_{\alpha}}{m}\right)^{m \cdot n} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \cdot I_{\alpha};$$

$$1 + \frac{j_{\alpha}}{m} = \left(1 + \frac{j}{m}\right) \cdot \sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}};$$

$$j_{\alpha} = \left(\sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right) - 1\right) \cdot m;$$

$$j_{\alpha} = \sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right) - m; \quad (4.4)$$

$$I_{\alpha} = (1 + 0,20)^2 = 1,44;$$

$$j_{\alpha} = \sqrt[8]{1,44} \cdot (1 + 0,1) - 1 = 0,2912 = 29,12\%;$$

$$S_{\alpha} = 40000 \cdot \left(1 + \frac{0,2912}{4}\right)^8 = 70179,47 \text{ (руб)}$$

$j_a = ?$
 $S_a = ?$

Ответ: 29,12%; 70179,47 рублей.

Пример 4.7. Определите реальную доходность финансовой операции, если при уровне инфляции 20% в год кредит выдается на 2 года по номинальной ставке сложных процентов в размере 30% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

Дано:

$n = 2$ года
 $j_{\alpha} = 30\% = 0,30$
 $a = 20\% = 0,20$
 $m = 4$

$j = ?$

Решение:

$$1 + \frac{j_{\alpha}}{m} = \left(1 + \frac{j}{m}\right) \cdot \sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}};$$

$$1 + \frac{j}{m} = \frac{1 + \frac{j_{\alpha}}{m}}{\sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}}};$$

$$j = \frac{m + \frac{j_{\alpha}}{\sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}}}}{\sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}}} - m; \quad (4.5)$$

$$I_{\alpha} = (1 + 0,20)^2 = 1,44$$

$$j = \frac{4 + 0,30}{\sqrt[8]{1,44}} - 4 = 0,1084 = 10,84\%$$

Ответ: кредит на данных условиях дает 10,84% дохода по ставке сложных процентов, начисляемых ежеквартально.

Пример 4.8. Определить, какой реальной доходностью обладает финансовая операция, если при уровне инфляции 20% в год деньги вкладываются на 2 года под 15% годовых при ежемесячном начислении процентов.

Дано:

$n = 2$ года
 $j_{\alpha} = 15\% = 0,15$
 $a = 20\% = 0,20$
 $m = 12$

$j = ?$

Решение:

$$j = \frac{m + \frac{j_{\alpha}}{\sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}}}}{\sqrt[m \cdot n]{I_{\alpha}}} - m;$$

$$I_{\alpha} = (1 + 0,20)^2 = 1,44;$$

$$j = \frac{12 + 0,15}{\sqrt[24]{1,44}} - 12 = -0,0332 = -3,32\%;$$

знак "-" означает убыточность операции.

Ответ: реальная убыточность 3,32% годовых при ежемесячном начислении процентов.

Модуль 3. Потоки платежей

В кредитном соглашении, как правило, предусматривается не одноразовое погашение всей суммы долга, а определенное количество выплат, распределенных во времени.

Ряд последовательных выплат и поступлений называют потоком платежей.

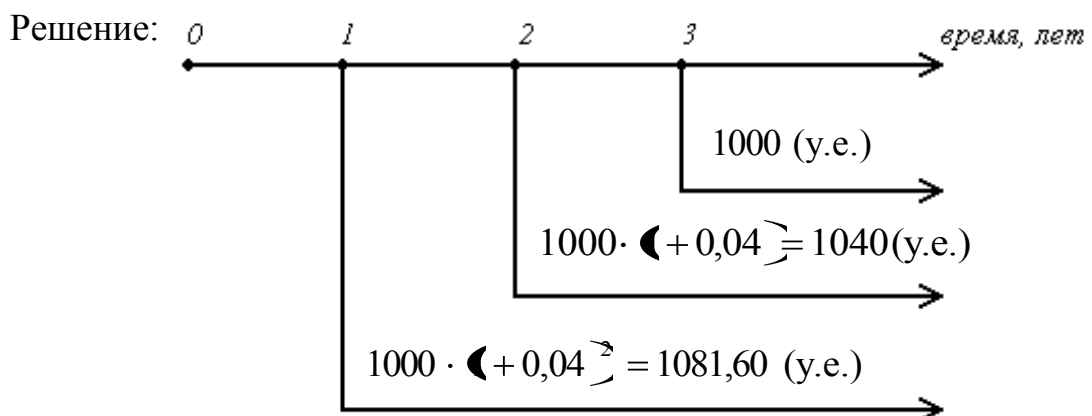
Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют финансовой рентой или аннуитетом.

Финансовая рента имеет следующие параметры:

- член ренты – величина каждого отдельного платежа;
- период ренты – временный интервал между двумя соседними платежами;
- срок ренты – время от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;
- процентная ставка – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей;
- число платежей в году;
- число начислений процентов в году;
- моменты платежа внутри периода ренты.

3.1. Формулы наращенной суммы.

Пример 3.1. Клиент может вносить в банк в конце каждого года 1000 у.е. Какая сумма будет им накоплена на счете через 3 года, если банк платит 4% по депозиту?



Первый взнос 1000 у.е. пробудет на счете 2 года и превратится в сумму: $1000 \cdot (1 + 0,04)^2 = 1081,60$ (y.e.)

Второй взнос 1000 у.е. пробудет на счете 1 год и превратится в сумму: $1000 \cdot (1 + 0,04) = 1040$ (y.e.)

На третий взнос проценты не начисляются.

Итого на счете у клиента будет сумма:

$$1000 \cdot (1+0,04)^0 + 1000 \cdot (1+0,04)^1 + 1000 \cdot (1+0,04)^2 = 3121,60 \text{ у.е.}$$

Рассмотрим данную задачу в общем виде. Клиент в конце каждого года вносит в банк вклад « R ». Найти сумму на счете через « n » лет, если банк начисляет сложные проценты по ставке « i ».

$$S = R \cdot (1+i)^0 + R \cdot (1+i)^1 + R \cdot (1+i)^2 + \dots + R \cdot (1+i)^{n-1};$$

$$S = R \cdot [(1+i)^0 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}].$$

В квадратных скобках сумма членов геометрической прогрессии, используя формулу для ее вычисления, получим:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (3.1)$$

Решим выше приведенный пример по формуле (3.1):

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$R = 1000 \text{ у.е.}$ $n = 3 \text{ года}$ $i = 0,04 = 4\%$	$S = 1000 \cdot \frac{(1+0,04)^3 - 1}{0,04} = 3121,60 \text{ у.е.}$
$S = ?$	Ответ: 3121.60 у.е.

Рассмотренный пример финансовой ренты, когда платежи были в конце периода начисления процентов, называется постнумерандо или обычной рентой (Ordinary Annuity).

Если в указанном примере клиент делает взносы по 1000 у.е. в начале каждого года, то $S = 1000 \cdot (1+0,04)^3 + 1000 \cdot (1+0,04)^2 + 1000 \cdot (1+0,04)^1 = 3246,64 \text{ у.е.}$

В общем случае формула имеет вид:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) \quad (3.2)$$

Этот вид ренты называется пренумерандо (Annuity Due).

Если начисление процентов производится « m » раз в году, а платежи « p » раз в году, то формула принимает вид:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}; \quad (3.3)$$

(3.3) – расчеты по формуле постнумерандо.

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \quad (3.4)$$

(3.4) – расчеты по схеме пренумерандо.

Пример 3.2. Раз в квартал делается взнос в банк по схеме пренумерандо в размере 400 у.е. Какая сумма будет на счете через 5 лет, если ставка сложных процентов 8% годовых при ежемесячном начислении процентов:

Дано:

R/p = 400 у.е.

p = 4

m = 12

i = 0,08 = 8%

n = 5 лет

Решение:

$$\begin{aligned} S &= \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} = \\ &= 400 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{60} - 1}{\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} \cdot \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{\frac{12}{4}} = 9927.83 \text{ (y.e.)} \end{aligned}$$

S = ?

Ответ: 9927,83 у.е.

Всего же будет заплачено за 5 лет сумма $400 \text{ у.е.} \cdot 20 = 8000 \text{ у.е.}$

На практике встречаются случаи, когда « m » = « p », т.е. количество периодов начисления процентов и число платежей в году одинаково. Тогда в формулах (3.3) и (3.4) вместо « p » ставят « m ».

Расчеты по схеме постнумерандо:

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\frac{j}{m}} \quad (3.5)$$

Расчеты по схеме пренумерандо:

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\frac{j}{m}} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right) \quad (3.6)$$

Пример 3.3. Руководство фирмы считает, что через 5 лет используемое оборудование морально устареет и его нужно будет обновить. Для этой цели фирме нужно накопить 10000 у.е. Каковы должны быть ежемесячные платежи, если процентная ставка 6% годовых при ежемесячном начислении процентов?

Дано:

$S = 10000$ у.е.
 $m = p = 12$
 $j = 0,06 = 6\%$
 $n = 5$ лет

Решение:

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\frac{j}{m}}; \quad \frac{R}{m} = \frac{S \cdot \frac{j}{m}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1};$$

$$\frac{R}{m} = \frac{10000 \cdot \frac{0.06}{12}}{\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{60} - 1} = 143.33 \text{ (y.e.)}$$

$R/m = ?$

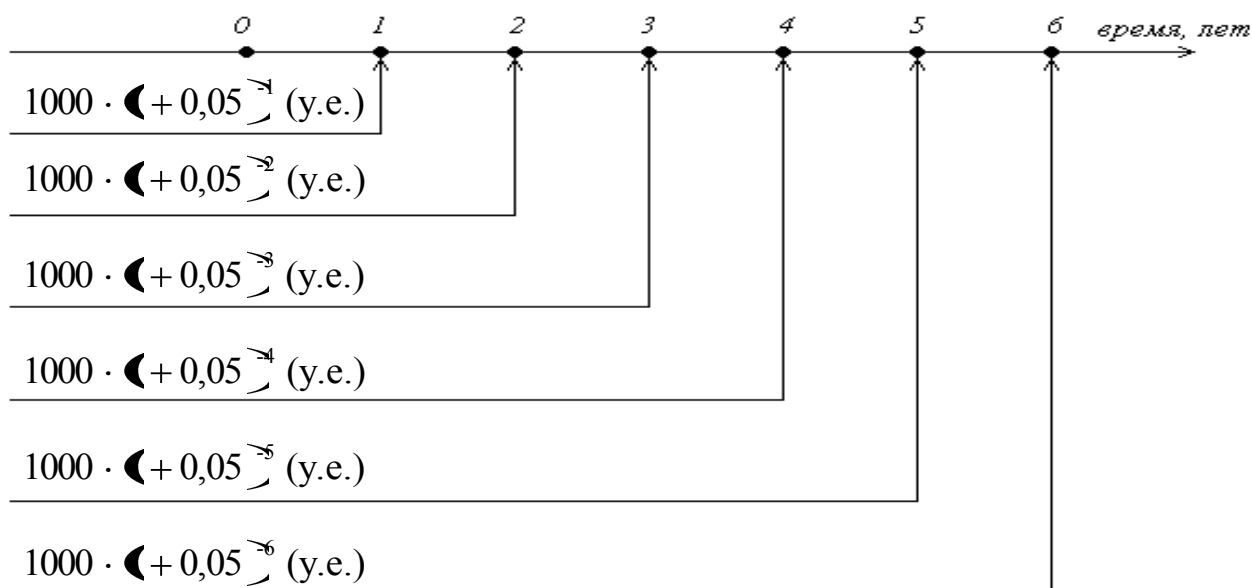
Ответ: 143.33 у.е.

Формулы (3.5) и (3.6) используются при решении задач, связанных с регулярными выплатами: формирования инвестиционного, пенсионного, страхового, резервного, накопительного фондов и т.п.

3.2. Формулы современной величины.

Пример 3.4. Какую сумму нужно внести в банк, выплачивающий 5% годовых, чтобы иметь возможность в течении последующих 6 лет ежегодно получать по 1000 у.е. (Предполагается, что после последней выплаты на счете нечего не останется).

Решение:



Чтобы через 1 год получить 1000 у.е., надо в начале вложить $1000 \cdot (1+0,05)^{-1}$ у.е.

Чтобы через 2 года получить 1000 у.е., надо в начале вложить $1000 \cdot (1+0,05)^{-2}$ у.е.

Чтобы через 6 лет получить 1000 у.е., надо в начале вложить $1000 \cdot (1+0,05)^{-6}$ у.е.

Таким образом, чтобы в течение 6 лет получать по 1000 у.е., надо в начале вложить следующую сумму:

$$A = 1000 \cdot (1+0,05)^{-1} + 1000 \cdot (1+0,05)^{-2} + 1000 \cdot (1+0,05)^{-3} + 1000 \cdot (1+0,05)^{-4} + 1000 \cdot (1+0,05)^{-5} + 1000 \cdot (1+0,05)^{-6};$$

$$A = 1000 \cdot (1,05^{-1} + 1,05^{-2} + 1,05^{-3} + 1,05^{-4} + 1,05^{-5} + 1,05^{-6}) = 5075,69 \text{ (y.e.)}$$

В общем виде формула имеет вид:

$$A = R \cdot [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n}]$$

В квадратных скобках сумма членов геометрической прогрессии:

$$A = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}, \quad (3.7)$$

где

R – годовой платеж;

i – процентная ставка.

Если платежи производят « p » раз в году, а начисление процентов « j » производят « m » раз в году, то формула имеет вид:

$$A = \frac{R}{P} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \quad (3.8)$$

Если $m = p$, количество платежей равно количеству периодов начисления процентов.

$$A = \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\frac{j}{m}} \quad (3.9)$$

Пример 3.4. Взят кредит 120000 рублей для приобретения жилья. Срок погашения кредита – 2 года. Процентная ставка – 25% годовых при ежемесячном начислении процентов. Каковы должны быть ежемесячные платежи, если по условию кредитного соглашения они должны быть одинаковыми?

Дано:

$A = 120000$ руб.

$m = p = 12$

$j = 0,25 = 25\%$

$n = 2$ года

Решение:

$$A = \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\frac{j}{m}}; \quad \frac{R}{m} = \frac{A \cdot \frac{j}{m}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}};$$

$$\frac{R}{m} = \frac{120000 \cdot \frac{0.25}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0.25}{12}\right)^{-24}} = 6404.58 \text{ рублей}$$

$R/m = ?$

Ответ: 6404,58 рублей.

Другими словами, получив кредит на 2 года под 25% годовых при ежемесячном начислении процентов, заемщику придется в течении 2 лет каждый месяц платить 6404,58 рублей.

Всего за 2 года будет заплачено $6404,58 \cdot 24 = 153709,98$ рублей.

3.3. План погашения кредита.

Одним из пунктов кредитного соглашения, как правило, является план погашения кредита. Рассмотрим план погашения кредита на примере:

Пример 3.5. Кредит 100000 рублей взят на 4 года под 20% годовых, начисляемых на непогашенный остаток по схеме сложных процентов. Возвращать надо равными суммами в конце каждого года. Составить план погашения кредита.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$A = 100000$ руб. $j = 0,20 = 20\%$ $n = 4$ года	$A = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}; \quad R = \frac{A \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}};$ $R = \frac{100000 \cdot 0.20}{1 - (1+0.20)^{-4}} = 38628,91 \text{ рублей}$
$R = ?$	Ответ: 38628,91 рублей.

Таблица 1. План погашения кредита.

№	Сумма долга на начало периода руб.	Сумма процентных денег за период, руб.	Погасительный платеж руб.	Сумма погашенного долга, руб.
1	2	3	4	5
1	100000	20000	38628,91	18628,91
2	81371,09	16274,22	38628,91	22354,69
3	59016,40	11803,28	38628,91	26825,63
4	32190,77	6438,14	38628,91	32190,77
Итого		54515,64	154515,64	100000,00

- 1) Заполняем столбец 4:
В каждой строке этого столбца записываем 38628,91. Это означает, что каждый год за кредит придется платить по 38628,91 рублей.
- 2) В 1^{ой} строке столбца 2 записываем сумму долга – 100000 рублей.
- 3) В 1^{ой} строке столбца 3 записываем сумму процентных денег - $100000 \cdot 0,20 = 20000$ рублей.
- 4) В 1^{ой} строке столбца 5 записываем сумму погашаемого долга за 1^й год – $38628 - 20000 = 18628,91$ рублей.

- 5) Во 2^й строке столбца 2 записываем сумму долга на начало 2^{го} года – $100000 - 18628,91 = 81671,09$ рублей.
- 6) Во 2^й строке столбца 3 записываем сумму процентных денег за 2^{ой} год – $81371,09 \cdot 0,20 = 16274,22$ рублей.
- 7) Во 2^й строке столбца 5 записываем сумму погашения долга за 2^{ой} год – $81371,09 \cdot 0,20 = 16274,22$ рубля.

Далее все аналогично рассчитывается для 3^{го} и 4^{го} годов и заполняется вся таблица 1. Причем сумма всех значений: в столбце 5 (сумма погашенного долга) должна быть равна сумме кредита; в столбце 3 – сумма всех выплаченных процентных денег; в столбце 4 (все заплаченные за кредит деньги) равна сумме итоговых значений в столбце 3 и столбце 5.

Рассмотрим тот же самый пример для случая, когда проценты начисляются несколько раз в году.

Пример 3.6. Кредит 100000 рублей взят на 4 года под 20% годовых, начисляемых на непогашенный остаток ежемесячно. Возвращать надо равными суммами в конце каждого года. Составить план погашения кредита.

Дано:

$A = 100000$ руб.
 $j = 0,20 = 20\%$
 $n = 4$ года
 $m = 12$
 $p = 1$

Решение:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}; \text{ при } p = 1, A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1};$$

$$R = \frac{A \cdot \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1\right)}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}} = \frac{100000 \cdot \left(\left(1 + \frac{0.20}{12}\right)^{12} - 1\right)}{1 - \left(1 + \frac{0.20}{12}\right)^{-48}} =$$

$$= 40056,90 \text{ рублей}$$

$R = ?$

Ответ: 40056,90 рублей.

Таблица 2. План погашения кредита.

№	Сумма долга на начало периода, Руб.	Сумма процентных денег за период, руб.	Погасительный платеж, руб.	Сумма погашенного долга, руб.
1	2	3	4	5
1	100000	21939,11	40056,90	18117,79
2	81882,21	17964,23	40056,90	22092,67

3	59789,54	13117,29	40056,90	26939,61
4	32849,93	7206,97	40056,90	32849,93
Итого		60227,60	160227,60	100000,00

1) Заполняем столбец 4.

В каждой строке этого столбца записываем 40056,90 рублей. Это означает, что каждый год за кредит придется платить по 40056,90 рублей.

2) В 1^{ой} строке столбца 2 записываем сумму долга – 100000 рублей.

3) В 1^{ой} строке столбца 3 записываем сумму процентных денег –

$$100000 \cdot \left(1 + \frac{0,20}{12}\right)^{12} - 100000 = 21939,11 \text{ рублей.}$$

4) В 1^{ой} строке столбца 5 записываем сумму погашенного долга за 1^й год – $40056,90 - 21939,11 = 18117,79$ рублей.

5) Во 2^{ой} строке столбца 2 записываем сумму долга на начало 2^{го} года – $100000 - 18117,79 = 81882,21$ рублей.

6) Во 2^{ой} строке столбца 3 записываем сумму процентных денег за

$$2^{\text{ой}} \text{ год} - 81882,21 \cdot \left(1 + \frac{0,20}{12}\right)^{12} - 81882,21 = 17964,23 \text{ рублей.}$$

7) Во 2^{ой} строке столбца 5 записываем сумму погашенного долга за 2^{ой} год – $40056,90 - 17964,23 = 22092,67$ рублей.

Далее все аналогично рассчитывается для 3^{го} и 4^{го} годов и заполняется вся таблица 2.

Итого заплачено за кредит 160227,60 рублей из них 100000,00 рублей – основной долг и 60227,60 рублей – процентные деньги.