ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ И СДАЧИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА»

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера студенческого билета или зачетной книжки (если последняя цифра — 0, то номер выполняемого варианта — 10).

Перед решением каждой задачи надо полностью привести ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего варианта.

Чистовой вариант работы выполняют в одном экземпляре, на белой бумаге форматом стандартного писчего листа (формат А-4, 210 х 297 мм). Текстовый редактор Microsoft Word. Работа предоставляется в печатном варианте, на одной стороне листа. Приемлема печать черного цвета, шрифтом размером 14, предпочтительнее Times New Roman или Arial, обычным начертанием и с обычным буквенным интервалом.

Весь текст набирается через одинарный интервал. Отступ красной строки должен быть одинаковым по всей работе и 1,25 см.

На каждой странице следует оставлять поля:

- левое – 30 мм;
- правое – 20 мм;
- верхнее – 20 мм;
- нижнее – 25 мм.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 2 КУРС, 3 СЕМЕСТР

Раздел «Теория вероятностей»

Задача 1

1.1. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий хотя бы одно окрашенное.

1.2. В секцию магазина поступило 10 велосипедов, из которых четыре с дефектами. Наудачу взяты 3. Найти вероятность того, что среди взятых велосипедов будут все одинакового качества.

1.3. Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти вероятности событий:

1) не выпало ни одной «6»;

2) выпало ровно три «6»;

3) выпала хотя бы одна «6»;

4) выпало хотя бы две «6».

1.4. Из колоды в 52 карты извлекаются 4 карты. Найти вероятности следующих событий:

1) в полученной выборке все карты трефовой масти;

2) в полученной выборке окажется хотя бы один валет.

1.5. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее, чем на 3 вопроса билета из 4. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что:

1) студент сдаст зачет;

2) студент не сдаст зачет.

1.6. На понедельник в институте запланировано 3 лекции по различным предметам из 10 изучаемых на данном курсе. Какова вероятность того, что студент, не успевший ознакомиться с расписанием, его угадает, если любое расписание из 3 предметов равновозможно?

1.7. Из колоды в 52 карты извлекаются 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один король?

1.8. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, а в другом ящике 10 белых и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика берется один шар?

1.9. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0.05. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за три смены?

1.10. В ящике 10 белых и 6 красных карандашей. Вынимается наудачу два карандаша. Какова вероятность того, что оба карандаша одного цвета?

Задача 2

2.1. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела — 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

2.2. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это легковая машина.

2.3. В специализированную больницу поступают в среднем 40% больных с заболеванием K, 35% с заболеванием L, 25% с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7, для болезней L и M соответственно 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

2.4. Имеются две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй — три белых и пять черных. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в пустую третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

2.5. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором — 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартна.

2.6. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено на первом заводе и 40% – на втором. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных на первом заводе, 90 соответствуют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту 80. Определить вероятность того, что взятая наугад лампочка будет соответствовать стандарту.

2.7. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

2.8. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго — 0,5, для третьего — 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

2.9. С первого автомата на сборку поступает 40%, со второго — 35%, с третьего — 25% деталей. Среди деталей первого автомата 0,2% бракованных, второго — 0,3%, третьего — 0,5%. Найти вероятность того, что:

1) поступившая на сборку деталь бракованная;

2) деталь, оказавшаяся бракованной, изготовлена на втором автомате.

2.10. В группе из 20 стрелков пять отличных, девять хороших и шесть посредственных. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9, хороший — с вероятностью 0,8 и посредственный — с вероятностью 0,6. Наугад выбранный стрелок выстрелил дважды; отмечено одно попадание и один промах. Каким, вероятнее всего, был этот стрелок: отличным, хорошим или посредственным?

Задача 3

3.1. Вероятность попасть в десятку у данного стрелка при одном выстреле равна 0,3. Определить вероятность попадания в десятку не менее 3 раз при 6 выстрелах.

3.2. Вероятность выигрыша по облигации займа равна 0,25. Какова вероятность того, что некто, приобретая 4 облигации, выиграет хотя бы по одной из них?

3.3. Страховая компания располагает статистическими сведениями: человеку, достигшему 65-ти лет, вероятность умереть на 66-ом году жизни равна 0,09. Какова вероятность того, что из четверых застрахованных в возрасте 65-ти лет двое будут живы через год?

3.4. На факультете учатся 500 студентов. Найти вероятность того, что первое сентября является днем рождения не менее трех студентов.

3.5. Вероятность попасть в десятку у данного стрелка при одном выстреле равна 0,2. Определить вероятность попадания в десятку не менее двух раз при десяти выстрелах.

3.6. При массовом производстве элементов электроники вероятность появления брака равна 0,002. Определить вероятность того, что в партии из 600 элементов бракованными будут ровно три элемента.

3.7. Батарея произвела 8 выстрелов по военному объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

3.8. На сборы приглашены 120 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив, равна 0,7. Определить вероятность того, что выполнят норматив: ровно 80 спортсменов; не менее 80.

3.9. В камере Вильсона фиксируется 36 столкновений частиц в час. Найти вероятность того, что в течение одной минуты не произойдет ни одного столкновения; произойдет более двух.

3.10. Игрок набрасывает кольца на колышек, вероятность удачи при этом равна 0,1. Найти вероятность того, что из шести колец на колышек попадут хотя бы два.

Задача 4

Для заданной случайной величины X:

1) составить закон распределения, функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

2) найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение;

3) определить $P(\alpha \le X \le \beta)$; $M(Y)$ и $D(Y)$ если $Y = kx + b$ (α, β, k, b — данные числа);

4) вычислить асимметрию $A(X)$ и эксцесс $Э_x$.

4.1. Электронная аппаратура имеет три дублирующие линии. Вероятность выхода из строя каждой линии за время гарантийного срока равна 0,1. Случайная величина X — число вышедших из строя линий.

$\alpha = 1$; $\beta = 2$; $k = 2$; $b = 3$.

4.2. Система радиолокационных станций ведет наблюдение за группой объектов, состоящих из пяти единиц. Каждый объект, независимо от других, может быть потерян с вероятностью 0,1. Случайная величина X — число потерянных объектов.

$\alpha = 1$; $\beta = 4$; $k = 3$; $b = –2$.

4.3. Прибор состоит из четырех узлов. Надежность каждого узла равна 0,3. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Случайная величина X — число вышедших из строя узлов.

$\alpha = 1$; $\beta = 3$; $k = 4$; $b = 1$.

4.4. Имеется пять станций, с которыми поддерживается связь. Время от времени связь теряется из-за атмосферных помех. Перерыв связи с каждой станцией происходит независимо от остальных с вероятностью 0,2. Случайная величина X — число станций, с которыми может быть потеряна связь.

$\alpha = 2$; $\beta = 4$; $k = –3$; $b = 2$.

4.5. Методом тестирования отыскивается неисправность в арифметическом устройстве вычислительной машины. Можно считать: есть 4 шанса из 5, что неисправность сосредоточена в одном из восьми микропроцессоров с равной вероятностью в любом из них. Число испытанных микропроцессоров есть случайная величина X.

$\alpha = 3$; $\beta = 5$; $k = 2$; $b = –5$.

4.6. Вероятность появление положительного результата в каждом опыте равна 0,9. Произведено четыре опыта. Случайная величина X — число отрицательных результатов среди проведенных четырех испытаний.

$\alpha = 1$; $\beta = 3$; $k = 5$; $b = –4$.

4.7. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,75. Случайная величина X — число попаданий в мишень при трех выстрелах.

$\alpha = 1$; $\beta = 2$; $k = 2$; $b = 5$.

4.8. В партии из 6 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу сразу извлекаются 3 детали. Случайная величина X — число бракованных деталей среди вынутых.

$\alpha = 0$; $\beta = 2$; $k = 5$; $b = 1$.

4.9. Два баскетболиста сделали по одному броску в корзину. Вероятность попадания для первого 0,85, а для второго — 0,6. Случайная величина X — число мячей, попавших в корзину.

$\alpha = 1$; $\beta = 2$; $k = 3$; $b = 2$.

4.10. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше четырех выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Случайная величина X — число произведенных выстрелов,

$\alpha = 1$; $\beta = 2$; $k = 4$; $b = -3$.

Примеры решения задач типового расчёта по теории вероятностей

Пример 1.1. В урне 4 красных, 6 зеленых и 5 синих шаров. Одновременно вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут:

1) одного (любого) цвета;

2) разных цветов.

Решение. Вероятность события по классической формуле определяется так:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — число всех элементарных исходов, m – число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A. Число всех шаров 15. Одновременно вынимают два шара (по условию). Таким образом, элементарным исходом является любой набор двух шаров из 15. Любые два элементарных исхода отличаются хотя бы одним шаром, значит, элементарный исход является сочетанием. Следовательно, число всех элементарных исходов равно числу сочетаний из 15 по 2. Итак,

$$n = C_{15}^{2} = \frac{15!}{13!\cdot 2!} = \frac{15\cdot 14}{2} = 105.$$

1) Рассмотрим случай, когда оба шара одного цвета: $m = m_1 + m_2 + m_3$, где

m_1 — число элементарных исходов, когда оба шара красные;

m_2 — оба шара зеленые;

m_3 — оба шара синие.

Найдем значения этих чисел:

$$m_1 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6;\ m_2 = C_6^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15;\ m_3 = C_5^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

Итак, $m = 6 + 15 + 10 = 31$ и $P(A_1) = 31/105$.

2) Рассмотрим случай, когда оба шара разных цветов:

m_1 — число элементарных исходов, когда один шар красный, другой — зеленый;

m_2 — когда один шар красный, другой — синий;

m_3 — когда один шар зеленый, другой — синий.

Найдем значения этих чисел:

$$m_1 = 4 \cdot 6 = 24; \quad m_2 = 4 \cdot 5 = 20; \quad m_3 = 6 \cdot 5 = 30$$

Таким образом, $m = 24 + 20 + 30 = 74$ и $P(A_2) = 74/105$.

Ответ: а) 31/105; б) 74/105.

Замечание. Если найдена вероятность того, что оба шара одного цвета $\left(P(A_1) = 31/105\right)$, то вероятность того, что оба шара будут разных цветов, можно найти проще, так как события A_1 и A_2 противоположные:

$$P(A_2) = 1 - 31/105 = 74/105.$$

Пример 2.1. Имеются две партии одинаковых изделий по 10 и 12 штук, причем в каждой из них по три изделия бракованных. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего из второй партии наудачу выбирается изделие. Какова вероятность того, что это изделие бракованное?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что из второй партии извлечено бракованное изделие после того, как в нее переложили взятое наугад изделие из первой партии. Строим предположения (гипотезы):

H_1 — из первой партии во вторую переложили небракованное изделие;

H_2 — из первой партии во вторую переложили бракованное изделие.

Исходя из условия задачи: $P(H_1) = \dfrac{7}{10}$; $P(H_2) = \dfrac{3}{10}$. После того, как во вторую партию переложили одно изделие, то в ней стало 13 изделий всего, в том числе либо 10 небракованных и 3 бракованных при условии H_1, либо 9 небракованных и 4 бракованных при условии H_2. Следовательно, вероятность выбора бракованной детали зависит от выполнения предположения $H_1 : P(A|H_1) = \dfrac{3}{13}$ или от выполнения предположения $H_2 : P(A|H_2) = \dfrac{4}{13}$. Поскольку H_1 и H_2 образуют полную группу событий и событие A происходит одновременно с одной из гипотез, то имеет место формула полной вероятности: $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)$. Подставляя найденные значения в эту формулу, получим $P(A) = 0,7 \cdot \dfrac{3}{13} + 0,3 \cdot \dfrac{4}{13} = 0,254.$

Пример 2. В магазин поступает радиоаппаратура от двух производителей. При этом первый производитель поставляет 60% , второй — 40% от общего числа единиц поступившей радиоаппаратуры. Вероятность неисправности радиоаппаратуры для первого поставщика равна 0,2, для второго — 0,1. Взятая наудачу радиоаппаратура оказалась исправной. Какова вероятность, что она поступила от второго производителя?

Решение. Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_1)$ и $P(H_2)$, а в результате опыта наступило событие A, то «новые» (уточненные) вероятности при условии, что событие A произошло, определяются по формуле Байеса.

Пусть A — наудачу взятая аппаратура исправна, H_1 — предположение состоящее в том, что аппаратура изготовлена первым производителем, H_2 — вторым производителем. Тогда $P(H_1) = 0,6$; $P(H_2) = 0,4$. Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)=0{,}8;$ $P(A|H_2)=0{,}9.$ Значит, полная вероятность $P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)$ в условиях задачи будет равна $P(A)=0{,}6\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}9=0{,}84.$

Уточненная вероятность второй гипотезы, то есть вероятность того, как после выбора исправной аппаратуры оказывается, что она изготовлена вторым производителем, вычисляется так:

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}84}=\frac{36}{84}=\frac{3}{7}=0{,}429.$$

Пример 3.1. На складе имеются две партии пряжи. Первая партия содержит 30%, а вторая — 20% пряжи второго сорта; остальная пряжа в обеих партиях первого сорта.

1) Определить, в пряже какой партии окажется большим наиболее вероятное число мотков пряжи первого сорта, если для контроля качества пряжи взяли 40 мотков из первой партии и 30 — из второй.

2) Сколько нужно взять мотков пряжи из первой партии, чтобы наиболее вероятное число мотков пряжи первого сорта в этой партии оказалось равным 5? Найти вероятность этого события.

Решение.

1) Наиболее вероятное (наивероятнейшее) число m_0 наступлений события А в n испытаниях определяется неравенством:

$$np-q\le m_0\le np+p,$$

где $p=p(A);$ $q=1-p.$ В условиях нашей задачи А — моток пряжи первого сорта. Для первой партии: $p=p(A)=0{,}7;$ $q=1-p=0{,}3;$ тогда

$$40\cdot 0{,}7-0{,}3\le m_{0_1}\le 40\cdot 0{,}7+0{,}7.$$

Следовательно, $m_{0_1}=28.$ Для второй партии: $p=p(A)=0{,}8;$ $q=1-p=0{,}2;$ $30\cdot 0{,}8-0{,}2\le m_{0_2}\le 30\cdot 0{,}8+0{,}8.$ Следовательно, $m_{0_2}=24.$ Итак, наиболее вероятное число мотков пряжи первого сорта в первой партии больше.

2) Пусть нужно взять n мотков пряжи из первой партии. По условию задачи $m_0=5,$ следовательно, $n\cdot 0{,}7-0{,}3\le 5\le n\cdot 0{,}7+0{,}7$ или $6{,}1\le n\le 7{,}6.$ Значит, $n=7.$

Для вычисления вероятности того, что в семи мотках пряжи из первой партии окажется пять мотков пряжи первого сорта, нужно применить формулу Бернулли, считая $p=0{,}7;$ $n=7;$ $m=5.$

Следовательно, $P_7(5)=C_7^5\cdot 0{,}7^5\cdot 0{,}3^2=0{,}318.$

Пример 3.2. В среднем в магазин заходит 3 человека в минуту. Найти вероятность того, что за 2 минуты в магазин зайдет:

1) 6 человек;

2) не более одного человека;

3) не менее одного человека.

Решение. Для решения задачи следует воспользоваться формулой Пуассона: $P(m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, где m — число событий за время t_0; a — среднее число событий за время t_0 (плотность простейшего потока событий). По условию задачи a = 3 · 2 = 6. Следовательно:

1) $P(6)=\dfrac{6^6\cdot e^{-6}}{6!}=0{,}161$ (использована таблица П1)

2) $P(m\le 1)=P(0)+P(1)=\dfrac{6^0}{0!}e^{-6}+\dfrac{6}{1!}\cdot e^{-6}=0{,}01735.$

Замечание. Используя таблицу П2 при $a=6;\quad k=1,$ получим

$$P(m\le 1)=0{,}01735.$$

3) $P(m\ge 1)=1-P(m<1)=1-P(m=0)=1-0{,}0248=0{,}9752.$

Пример 3.3. Вероятность того, что изготовленная рабочим деталь отличного качества, равна 0,8. Найти вероятность того, что среди ста деталей окажется отличного качества:

1) 80 деталей;

2) не менее 70 и не более 85 деталей.

1) Вероятность того, что среди 100 отобранных 80 деталей отличного качества можно определить и по формуле Бернулли:

$P_{100}(80)=C_{100}^{80}\cdot 0{,}8^{80}(1-0{,}8)^{20}$. Но из-за громоздкости вычислений по этой формуле и зная, что $n=100$ и np = 80, а $npq=16$, лучше применить локальную формулу Муавра-Лапласа:

$P_n(m)=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$. Значения функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ возьмем в таблице П3.

Итак, $P_{100}(80)=\dfrac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot\varphi\left(\dfrac{80-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=\dfrac{1}{4}\varphi(0)=0{,}0997.$

2) Для вычисления $P(70\le m\le 85)$ следует воспользоваться интегральной формулой Муавра–Лапласа:

$$P(m_1\le m\le m_2)=\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$ табулирована (см. таблицу П3).

Итак,

$$P(70\le m\le 85)=\Phi\left(\frac{85-80}{4}\right)-\Phi\left(\frac{70-80}{4}\right)=\Phi(1{,}25)-\Phi(-2{,}5)=$$

$$=\Phi(1{,}25)+\Phi(2{,}5)=0{,}3944+0{,}4938=0{,}8882.$$

Пример 4.1. Сырье на завод поступает на автомашинах от трех независимо работающих поставщиков. Вероятность прибытия автомашины от первого поставщика равна $p_1 = 0,2$; от второго — $p_2 = 0,3$, от третьего — $p_3 = 0,1$. Случайная величина X — число прибывших автомашин. Составить: закон распределения; функцию распределения $F(x)$ данной случайной величины и построить ее график. Найти: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Определить: $P(1 \le X \le 2)$, $M(Y)$ и $D(Y)$, где $Y = 2X + 5$.

Решение. Закон распределения представим в виде таблицы значений случайной величины X и соответствующих вероятностей. Заметим, что возможные значения дискретной случайной величины X равны 0, 1, 2, 3. Определим соответствующие этим значениям вероятности:

$$p_1 = P(X = 0) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504$$

$$p_2 = P(X = 1) = 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,1 = 0,398$$

$$p_3 = P(X = 2) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,092$$

$$p_4 = P(X = 3) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,006$$

Контроль:

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,504 + 0,398 + 0,092 + 0,006 = 1$. Значит, соответствующие вероятности рассчитаны верно.

Теперь можно записать таблицу распределения:

X	0	1	2	3
P	0,504	0,398	0,092	0,006

Далее найдем функцию распределения вероятностей $F(x) = P(X < x)$:

$F(x) = P(X$

1) если $x \le 0$, то $F(x) = 0$;

2) если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X = 0) = 0,504$;

3) если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X = 0 \cup X = 1) = 0,504 + 0,398 = 0,902$;

4) если $2 < x \le 3$, то

$$F(x) = P(X = 0 \cup X = 1 \cup X = 2) = 0,504 + 0,398 + 0,092 = 0,994;$$

5) если $x > 3$, то $F(x) = P(X = 0 \cup X = 1 \cup X = 2 \cup X = 3) = 1$.

Построим график этой функции (Рис. 1):

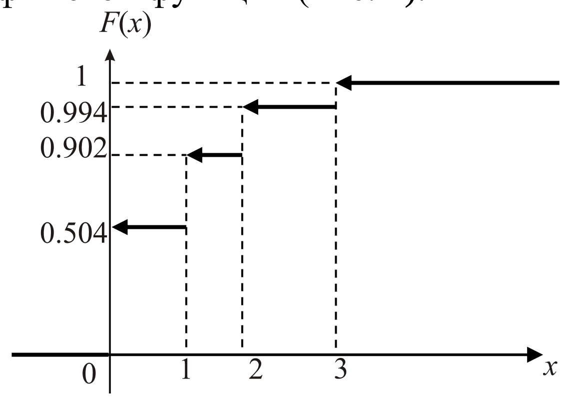

Рис. 1

Теперь определим числовые характеристики заданной случайной величины, исходя из соответствующих формул:

- $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \Rightarrow$

  $M(X)=0\cdot 0,504+1\cdot 0,398+2\cdot 0,092+3\cdot 0,006=0,6.$
- $D(X)=M(X^2)-M^2(X)\Rightarrow$

  $D(X)=0^2\cdot 0,504+1^2\cdot 0,398+2^2\cdot 0,092+3^2\cdot 0,006-0,6^2=0,46.$
- $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0,678.$
- Далее, $P(1\le X\le 2)=P(X=1\cup X=2)=0,398+0,092=0,490.$
- По условию задачи $Y=2X+5.$ Следовательно:

  $M(Y)=M(2X+5)=M(2X)+M(5)=2M(X)+5=2\cdot 0,6+5=6,2.$

  $D(Y)=D(2X+5)=2^2D(X)+D(5)=4D(X)=4\cdot 0,46=1,84.$

Раздел «Математическая статистика»

Задача 1

В таблице приведен статистический ряд распределения случайной величины X.

Требуется:

а) Вычислить числовые характеристики выборки: выборочное среднее $\bar{x}$; выборочное среднее квадратическое отклонение s; выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса A^* и E^*; выборочный коэффициент вариации V.

б) Предполагая, что исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону, найти теоретические частоты и проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности с помощью критерия согласия χ^2.

в) Найти интервальные оценки параметров нормального закона распределения (доверительную вероятность принять равной $\gamma = 0{,}95$).

№ варианта						
1	x_i	4,0 — 4,2	4,2 — 4,4	4,4 — 4,6	4,6 — 4,8	4,8 — 5,0
	n_i	6	20	46	23	11
2	x_i	3,4 — 3,6	3,6 — 3,8	3,8 — 4,0	4,0 — 4,2	4,2 — 4,4
	n_i	9	24	119	43	5
3	x_i	4,00 — 4,02	4,02 — 4,04	4,04 — 4,06	4,06 — 4,08	4,08 — 4,10
	n_i	6	20	46	23	11
4	x_i	2,0 — 2,2	2,2 — 2,4	2,4 — 2,6	2,6 — 2,8	2,8 — 3,0
	n_i	6	23	38	25	8
5	x_i	9,7 — 9,8	9,8 — 9,9	9,9 — 10,0	10,0 — 10,1	10,1 — 10,2
	n_i	4	11	17	13	5
6	x_i	-0,4 — -0,2	-0,2 — 0,0	0,0 — 0,2	0,2 — 0,4	0,4 — 0,6
	n_i	13	18	45	19	5
7	x_i	19,80 — 19,82	19,82 — 19,84	19,84 — 19,86	19,86 — 19,88	19,88 — 19,90
	n_i	6	13	15	11	5
8	x_i	20,00 — 20,04	20,04 — 20,08	20,08 — 20,12	20,12 — 20,16	20,16 — 20,20
	n_i	7	19	45	20	9
9	x_i	2,0 — 2,2	2,2 — 2,4	2,4 — 2,6	2,6 — 2,8	2,8 — 3,0
	n_i	7	20	44	21	8
10	x_i	1,2 — 1,6	1,6 — 2,0	2,0 — 2,4	2,4 — 2,8	2,8 — 3,2
	n_i	7	20	48	19	6

Задача 2

В таблице приведены наблюдаемые значения признаков X и Y. Требуется:

1. По данным, приведённым в таблице, вычислить числовые характеристики величин X и Y: средние $\overline{x}$, $\overline{y}$; средние квадратические отклонения s_x, s_y, корреляционный момент K_{xy}, коэффициент корреляции $r_В$.

2. Проверить значимость коэффициента корреляции.

3. Построить диаграмму рассеяния и по характеру расположения точек на диаграмме подобрать общий вид функции регрессии.

4. Найти эмпирические функции регрессии Y на X и X на Y и построить их графики.

№ вари-анта											
1	X	110	85	70	120	150	90	60	140	100	115
	Y	6,1	4,2	2,9	5,8	8,3	5,2	3,4	7,5	4,9	5,4
2	X	80	60	100	130	120	50	90	150	70	125
	Y	4,2	4,9	7,2	9,1	6,4	3,9	5,1	8,4	3,5	8,7
3	X	160	120	110	80	90	130	150	70	100	60
	Y	12,5	9,3	9,2	6,4	7,5	11,6	13,1	5,2	7,9	4,4
4	X	50	130	100	80	90	70	150	60	140	110
	Y	4,2	10,8	9,6	5,1	7,4	6,2	11,4	3,3	12,2	10,5
5	X	60	90	150	80	110	120	70	130	100	140
	Y	2,9	7,1	11,8	6,3	7,2	8,4	4,8	11,2	6,7	10,6
6	X	70	110	85	65	100	90	120	80	130	110
	Y	2,8	3,5	2,4	2,1	3,4	3,2	3,6	2,5	4,1	3,3
7	X	80	60	100	70	50	110	90	40	75	105
	Y	4,2	4,0	4,5	3,6	3,4	5,2	3,9	3,1	3,3	4,9
8	X	100	110	60	120	70	80	130	75	105	50
	Y	3,8	4,4	3,2	4,8	3,0	3,5	4,5	3,3	4,1	3,1
9	X	120	85	110	70	115	90	60	55	100	130
	Y	4,0	3,6	4,0	2,6	4,3	3,4	2,9	2,5	3,0	4,5
10	X	140	110	120	90	130	80	100	75	135	60
	Y	5,4	4,1	5,6	3,3	4,2	2,9	3,6	2,5	4,9	3,0

Задача 3

Используя приведенные в корреляционной таблице данные, требуется:

1. Найти числовые характеристики выборки — средние $\bar{x}, \bar{y}$; средние квадратические отклонения s_x, s_y; корреляционный момент K_{xy}, выборочный коэффициент корреляции $r_В$.
2. Проверить значимость коэффициента корреляции.
3. Найти эмпирические функции регрессии y_x, x_y.

№ варианта

1.

Y \ X	1	3	5	7	9
5	3	2			
6	6	14	3	1	
7	1	6	27	12	2
8			5	4	8
9				2	4

2.

Y \ X	3	5	7	9	11
4	4				
8	1	6	2		
12		4	10	2	
16			6	9	2
20				1	3

3.

Y \ X	2	6	10	14	18
5	2	4	2		
10		2	10	4	
15			3	10	5
20				2	5
25					1

4.

Y \ X	3	5	7	9	11
40	4	1			
60	1	3	3		
80		2	7	4	
100			4	8	1
120				4	8

№ варианта						
5.	***X*** / ***Y***	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**
	2	3	2			
	4	5	15	3	1	
	6	1	5	30	10	2
	8			5	4	8
	10				2	4
6.	***X*** / ***Y***	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
	5	3	1			
	7	1	5	2		
	9		4	18	5	
	11			8	18	7
	13			6	19	3
7.	***X*** / ***Y***	**43**	**45**	**47**	**49**	**51**
	20	2	4			
	25		6	2		
	30		3	50	2	
	35		1	10	6	
	40			4	7	3
8.	***X*** / ***Y***	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
	43	1	5	2		
	45	1	9	4		
	47		4	40	8	
	49			1	12	2
	51			1	3	7
9.	***X*** / ***Y***	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**
	2			2	10	1
	6		6	12	2	
	10	6	8	15	1	
	14	6	11	5		
	18	10	4	1		
10.	***X*** / ***Y***	**1**	**6**	**11**	**16**	**21**
	8			1	4	1
	12		2	4	2	
	16		2	4	4	
	20	1	9	2		
	24	10	1			

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

При решении задач типового расчета по математической статистике используются основные понятия математической статистики: способы группировки статистического материала, числовые характеристики выборки, теория точечных и интервальных оценок параметров нормального распределения, теория проверки статистических гипотез, элементы регрессионного анализа и теории корреляции. Соответствующий теоретический материал должен быть изучен студентами самостоятельно.

Пример 1. При сверлении 80 отверстий одним и тем же сверлом и последующим измерением диаметров отверстий получены следующие результаты (в мм).

40,26	40,55	40,44	40,35	40,39	40,40	40,42	40,32
40,37	40,35	40,44	40,35	40,30	40,34	40,31	40,32
40,33	40,41	40,35	40,30	40,33	40,38	40,33	40,33
40,28	40,30	40,40	40,36	40,32	40,42	40,35	40,34
40,29	40,30	40,31	40,33	40,36	40,34	40,30	40,30
40,41	40,40	40,33	40,37	40,34	40,30	40,43	40,34
40,35	40,34	40,34	40,31	40,43	40,36	40,34	40,34
40,28	40,44	40,32	40,34	40,31	40,31	40,36	40,34
40,29	40,39	40,39	40,37	40,37	40,38	40,36	40,41
40,27	40,38	40,37	40,37	40,36	40,35	40,32	40,36

Требуется:

1) составить интервальные статистические ряды распределения частот и относительных частот (частостей) наблюдаемых значений случайной величины X — диаметров отверстий;

2) построить гистограмму и полигон относительных частот (частостей) диаметров отверстий;

3) найти эмпирическую функцию распределения и построить её график;

4) вычислить числовые характеристики выборки: выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию s^2, выборочное среднее квадратическое отклонение s, выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса A^* и E^*, выборочный коэффициент вариации V;

5) по виду гистограммы и полигона частостей, а также выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса и, исходя из механизма образования исследуемой случайной величины X, сделать предварительный выбор закона распределения этой случайной величины;

6) найти точечные оценки параметров нормального закона распределения, предполагая, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону, записать дифференциальную (плотность вероятности) и интегральную функции распределения этой случайной величины;

7) найти теоретические частоты нормального закона распределения, проверить согласие эмпирической функции распределения с нормальным законом с помощью критерия согласия χ^2;

8) найти интервальные оценки параметров нормального закона распределения (доверительную вероятность принять равной $(1-\alpha)=\gamma=0{,}95$).

Решение. 1) Изучение непрерывных случайных величин начинается с группировки статистического материала, т.е. с разбиения интервала наблюдения значений случайной величины X (СВ X) на k частичных интервалов равной длины и подсчета частот попадания наблюдаемых значений СВ X в частичные интервалы. Количество интервалов выбирается произвольно. Обычно число интервалов бывает не менее 5 и не более 15 (в учебных целях рекомендуется выбирать число интервалов равным 5—6).

Разобьём весь диапазон наблюдаемых значений на пять частичных интервалов (разрядов). Длину частичного интервала определим по формуле

$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{k}=\frac{40{,}44-40{,}26}{5}=0{,}036.$$

Для упрощения вычислений примем $h=0{,}4$. За начало первого интервала принимаем величину $x_1^*=40{,}24$. Тогда $x_2^*=40{,}28$ и т.д.; первый частичный интервал будет [40,24; 40,28), второй — [40,28; 40,32) и т.д. При составлении интервального статистического ряда в каждый интервал (кроме последнего) будем включать значения СВ X, которые больше либо равны левой границе интервала и строго меньше правой границы; в последний интервал включим значения, равные правой границе. В результате получим статистический ряд распределения частот (табл. 1).

Таблица 1

Частичные интервалы	[40,24;40,28)	[40,28;40,32)	[40,32;40,36)	[40,36;40,40)	[40,40;40,44]
Середины интервалов, x_i	40,26	40,30	40,34	40,38	40,42
Частоты, m_i	4	14	30	19	13

$$n=\sum m_i=80$$

Замечание. В задаче 1 типового расчета интервальный статистический ряд частот задан, т.е. группировка статистического материала уже произведена. Поэтому решение задач следует начинать с составления статистического ряда распределения частостей.

Для получения статистического ряда частостей разделим частоты m_i на объем выборки n: $w_i=\dfrac{m_i}{n}$. В результате получим статистический ряд распределения частостей (столбец 3 табл. 2).

Таблица 2

Частичные интервалы	**Середины интервалов,** x_i	**Частости,** w_i	$\frac{w_i}{h}$	**Накопленные частости,** $F^*(x)$
[40,24; 40,28)	40,26	0,0500	1,2500	0,0500
[40,28; 40,32)	40,30	0,1750	4,3750	0,2250
[40,32; 40,36)	40,34	0,3750	9,3750	0,6000
[40,36; 40,40)	40,38	0,2375	5,9375	0,8375
[40,40; 40,44]	40,42	0,1625	4,0625	1,0000

2) Для построения гистограммы относительных частот (частостей) на оси OX откладываются частичные интервалы, на каждом из них строится прямоугольниквысотой $\frac{w_i}{h}$ (см. столбец 4 табл. 2), площадь которого равна относительной частоте (частости) данного частичного интервала; сумма площадей таких прямоугольников равна 1.

Полигон частостей представляет собой многоугольник с вершинами в точках $\left(x_i, \frac{w_i}{h}\right)$.

Гистограмма и полигон частостей представлены на Рис. 2 (для наглядности, при построении гистограммы, полигона частостей и, далее, эмпирической функции распределения масштаб по оси абсцисс и оси ординат может быть выбран различным).

3) Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ определяется по значениям накопленных частостей соотношением

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} w_i,$$

где суммируются частоты тех элементов выборки, для которых выполняется неравенство $x_i < x$, и x_i — середина интервала группировки. Очевидно, что $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_n$. На промежутке $(x_1, x_n]$ $F^*(x)$ представляет собой неубывающую кусочно постоянную функцию.

Таким образом (см. последний столбец табл. 2), имеем следующую эмпирическую функцию распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 40{,}26] \\ 0{,}05 & x \in (40{,}26; 40{,}30] \\ 0{,}225 & x \in (40{,}30; 40{,}34] \\ 0{,}6 & x \in (40{,}34; 40{,}38] \\ 0{,}8375 & x \in (40{,}38; 40{,}42] \\ 1 & x \in (40{,}42; +\infty) \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения изображен на Рис. 3.

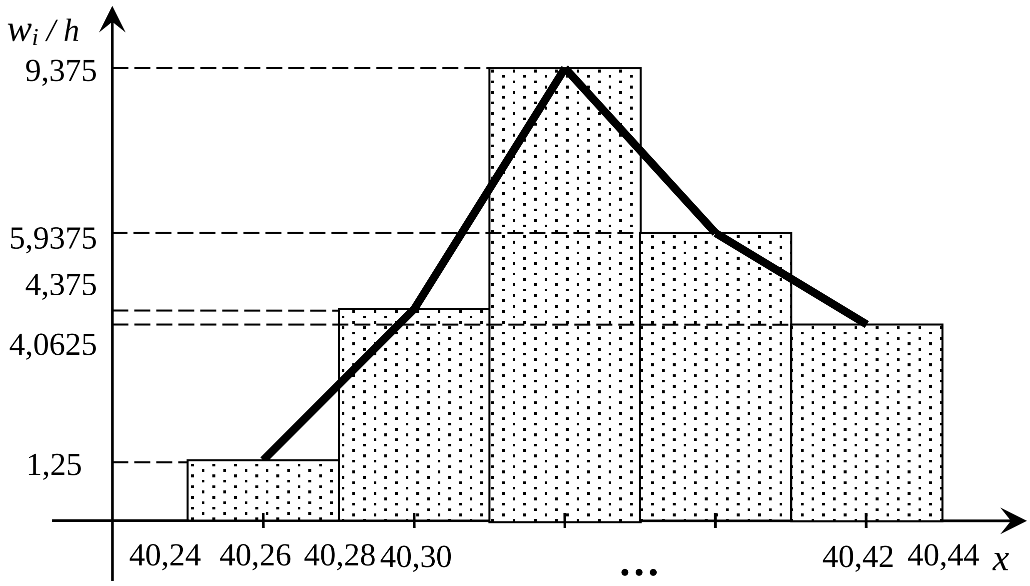

Рис. 2

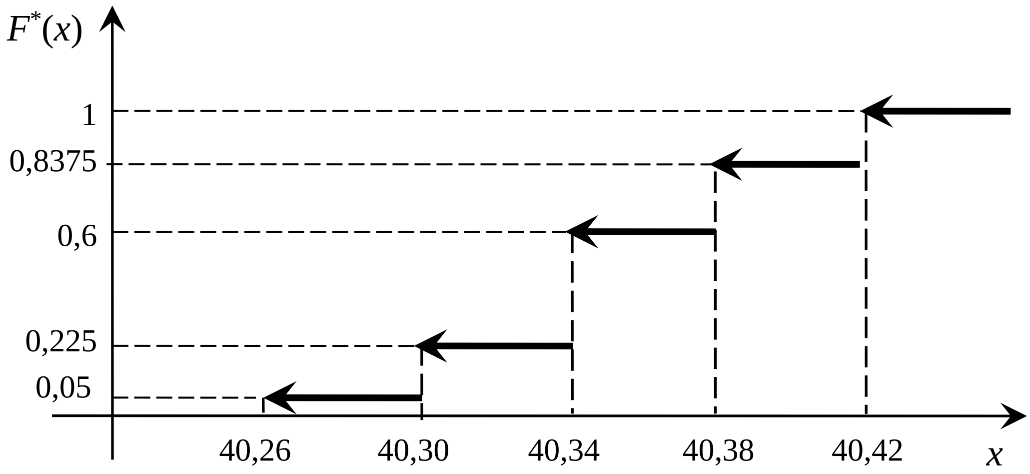

Рис. 3

4) Выборочное среднее вычислим по формуле $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$:

$$\bar{x} = \frac{40{,}26 \cdot 4 + 40{,}30 \cdot 14 + 40{,}34 \cdot 30 + 40{,}38 \cdot 19 + 40{,}42 \cdot 13}{80} = 40{,}352.$$

Для вычисления остальных числовых характеристик выборки предварительно вычислим центральные эмпирические моменты 2, 3 и 4 порядков:

$$\mu_k = \frac{\sum m_i \left(x_i - \bar{x}\right)^k}{n} \quad (k = 2, 3, 4).$$

Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Частичные интервалы	**Середины интервалов,** x_i	**Частоты,** m_i	$\left(\bar{x}-x\right)^2 m_i$	$\left(\bar{x}-x\right)^3 m_i$	$\left(\bar{x}-x\right)^4 m_i$
[40,24; 40,28)	40,26	4	0,0339	-0,00312	0,00029
[40,28; 40,32)	40,30	14	0,0379	-0,00197	0,00010
[40,32; 40,36)	40,34	30	0,0043	-0,00005	0,00000
[40,36; 40,40)	40,38	19	0,0149	0,00042	0,00001
[40,40; 40,44]	40,42	13	0,0601	0,00409	0,00028
Σ		80	0,1511	-0,00063	0,00068
μ_k			0,0019	-0,0000079	0,0000085

Имеем

выборочная дисперсия $s^2 = \mu_2 = 0{,}0019$;

выборочное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}0019} \approx 0{,}044$;

выборочный коэффициент асимметрии $A^* = \dfrac{m_3}{\sigma^3} = \dfrac{-0{,}0000079}{(0{,}044)^3} \approx -0{,}0927$;

выборочный коэффициент эксцесса $E^* = \dfrac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{0{,}0000085}{(0{,}044)^4} - 3 \approx -0{,}7322$;

выборочный коэффициент вариации $V = \dfrac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}044}{40{,}352} \cdot 100\% \approx 0{,}109\%$.

5) Для предварительного выбора закона распределения вычислим вначале средние квадратические ошибки определения асимметрии

$$S_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 79}{81 \cdot 83}} \approx 0{,}266$$

и эксцесса

$$S_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 80 \cdot 78 \cdot 77}{79^2 \cdot 83 \cdot 85}} \approx 0{,}512.$$

Критерием распределения диаметров отверстий(СВ X) по нормальному закону является равенство нулю выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса. Из приведённых расчётов видно, что выборочные коэффициенты асимметрии A^* и эксцесса E^* отличаются (по абсолютной величине) от нуля не более чем на удвоенные средние квадратические ошибки их определения, что соответствует нормальному закону распределения.

Вид гистограммы и полигона частостей (Рис. 2) также напоминает нормальную кривую (кривую Гаусса).

Можно предположить, что диаметр отверстий (СВ X) изменяется под влиянием большого числа факторов примерно равнозначных по силе (изменение температуры, вибрация, изменение механических свойств сверла или заготовки и т.д.). Поэтому, исходя из «технологии» образования СВ X , т.е. механизма образования отклонений диаметров отверстий от некоторого номинального значения, можно предположить, что закон распределения диаметров отверстий является нормальным.

6) Дифференциальная функция нормального закона распределения $N(a,\sigma)$ с параметрами a,σ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Точечными оценками параметров $a,\ \sigma$ нормального распределения являются выборочное среднее и выборочное среднее квадратичное отклонение соответственно:

$$a=\bar{x}=40{,}352;\ \sigma=s=0{,}044.$$

Следовательно, дифференциальная функция предполагаемого нормального закона распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{0{,}044\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-40{,}352)^2}{0{,}0038}},$$

интегральная функция предполагаемого нормального закона распределения имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{0{,}044\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-40{,}352)^2}{0{,}0038}}dt.$$

Используя нормированную функцию Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, интегральную функцию распределения нормального закона можно записать в виде

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-40{,}352}{0{,}044}\right).$$

7) Проведем детальную проверку гипотезы о распределении СВ X (диаметра отверстий) по нормальному закону с помощью критерия согласия χ^2. Для этого пронормируем частичные интервалы, выразив их в единицах среднего квадратическогоотклонения s:

$$u_i=\frac{x_i^*-\bar{x}}{s},$$

причем наименьшее значение u_i положим равным $-\infty$, наибольшее — $+\infty$ (см. столбец 3 табл. 4).Заметим, что так определённая СВ U является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с параметрами $a = 0$; $\sigma = 1$.

Таблица 4

Частичные интервалы	**Частоты, m_i**	**Нормированные интервалы, (u_i, u_{i+1})**	**Теоретические вероятности, p_1**	**Теоретические частоты, $n{\cdot}p_i$**	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}$
[40,24; 40,28)	4	(-∞; -1,64)	0,0505	4,0	0,00	0,00
[40,28; 40,32)	14	(-1,64; -0,73)	0,1822	14,6	0,36	0,02
[40,32; 40,36)	30	(-0,73; 0,18)	0,3387	27,1	8,41	0,31
[40,36; 40,40)	19	(0,18; 1,09)	0,2907	23,3	18,49	0,79
[40,40; 40,44]	13	(1,09; ∞)	0,1379	11,0	4,00	0,36
Суммы	80		1,000	80,0		$\chi^2_{\text{н}} = 1{,}48$

Далее вычисляем теоретические вероятности — вероятности попадания СВ X, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 40{,}352$; $\sigma = 0{,}044$, в частичные интервалы $\left(x_i^*,\ x_{i+1}^*\right)$ по формуле

$$p_i = P\left(x_i^* < X < x_{i+1}^*\right) = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i),$$

где

$$u_i = \frac{x_i^* - \bar{x}}{s},$$

$$\Phi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_i} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

(значения функции Лапласа приведены в таблице П3).

Например, вероятность того, что СВ X попадает в первый частичный нормированный интервал $(-\infty < x < 40{,}28)$ равна

$$p_1 = P(-\infty < X < 40{,}28) = \Phi\left(\frac{40{,}28 - 40{,}352}{0{,}044}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 40{,}352}{0{,}044}\right) =$$
$$= \Phi(-1{,}64) - \Phi(-\infty) = -\Phi(1{,}64) + \Phi(\infty) = -0{,}4495 + 0{,}5 = 0{,}0505.$$

Аналогично

$$p_2 = P(40{,}28 < X < 40{,}32) = \Phi\left(\frac{40{,}32 - 40{,}352}{0{,}044}\right) - \Phi\left(\frac{40{,}28 - 40{,}352}{0{,}044}\right) =$$

$$= \Phi(-0{,}73) - \Phi(-1{,}64) = -\Phi(0{,}73) + \Phi(1{,}64) = -0{,}2673 + 0{,}4495 = 0{,}1822$$

и т.д. (см. столбец 4 табл. 4).

После этого вычисляют теоретические частоты нормального закона распределения $n_i' = np_i$ (см. столбец 5 табл. 4) и наблюдаемое значение критерия χ^2:

$$\chi^2_{\text{н}} = \sum \frac{(m_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i},$$

где m_i — эмпирические частоты, np_i — теоретические частоты.

В результате вычислений получили $\chi^2_{\text{н}} = 1{,}48$ (см. столбец 7 табл. 4).

Затем по таблицам квантилей распределения χ^2 (см. таблицу П5) находят критическое значение $\chi^2_{\text{кр}} = .\chi^2_{\alpha;\nu}$, где $\alpha = 1 - \gamma$ — уровень значимости и $\nu = k - r - 1$ — число степеней свободы(здесь k — число интервалов, r — число параметров предполагаемого закона распределения СВ X). В нашей задаче $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05, k = 5$, $r = 2$ и, следовательно, $\nu = 2$.Таким образом, критическое значение $\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2_{0{,}05;2} = 5{,}99$.

Если $\chi^2_{\text{н}} \le \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза о нормальном распределении СВ X (диаметра отверстий) принимается; в противном случае, т.е. если $\chi^2_{\text{н}} > \chi^2_{\text{кр}}$, гипотеза о распределении СВ X по нормальному закону отвергается. Поскольку в нашей задаче $\chi^2_{\text{н}} = 1{,}48 < \chi^2_{\text{кр}} = 5{,}99$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении СВ X — диаметра отверстий.

8) Найдем интервальную оценку математического ожидания нормального распределения.

Интервальная оценка для математического ожидания нормального распределения имеет вид

$$\bar{x} - t_{\alpha;\nu} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\alpha;\nu} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{x}$ — выборочное среднее,

n — объем выборки,

$t_{\alpha;\nu}$ — квантиль распределения Стьюдента для уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma$ и числа степеней свободы $\nu = n - 1$, отыскиваемое по таблице П4.

Так как в нашей задаче $\bar{x} = 40{,}352; s = 0{,}044$; $n = 80$; $\alpha = 0{,}05$; $\nu = 79$, то $t_{\alpha;\nu} = t_{0{,}05;79} = 1{,}99$.

Таким образом, имеем следующую интервальную оценку математического ожидания:

$$40{,}352 - 1{,}99 \cdot \frac{0{,}044}{\sqrt{80}} < a < 40{,}352 + 1{,}99 \cdot \frac{0{,}044}{\sqrt{80}},$$

$$40{,}342 < a < 40{,}362.$$

Смысл полученного результата. Если будет произведено достаточно большое число выборок по 80 отверстий, то в 95% из них доверительный интервал (40,342; 40,362) накроет математическое ожидание диаметра отверстий и только в 5% среднее диаметра отверстий может выйти за границы доверительного интервала.

Пример 2. Экономист, изучая зависимость выработки Y (*ден.ед.*) на одного работника торговли от величины товарооборота X (*ден.ед.*) магазина за определённый период, получил данные по $n = 15$ магазинам одинакового профиля (см. табл. 5).

Таблица 5

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	150	38	85	28	146	34	95	50	134	120	74	140	110	60	86
Y	7,2	5,8	7,5	4,4	8,4	4,5	7,0	5,0	6,4	8,0	6,0	7,8	6,2	5,8	6,0

Требуется:

1. По данным, приведённым в таблице, вычислить числовые характеристики величин X и Y: средние $\overline{x}$, $\overline{y}$; средние квадратические отклонения s_x, s_y, корреляционный момент K_{xy}, коэффициент корреляции r.

2. Проверить значимость коэффициента корреляции.

3. Построить диаграмму рассеяния и по характеру расположения точек на диаграмме подобрать общий вид функции регрессии.

4. Найти эмпирические функции регрессии Y на X и X на Y и построить их графики.

Решение.

1. Прежде чем вычислять основные статистические характеристики, составим таблицу, содержащую исходные данные и промежуточные вычисления (табл. 6).

Таблица 6

№ п/п	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	150	7,2	22500	51,84	1080,0
2	38	5,8	1444	33,64	220,4
3	85	7,5	7225	56,25	637,5
4	28	4,4	784	19,36	123,2
5	146	8,4	21316	70,56	1226,4
6	34	4,5	1156	20,25	153,0
7	95	7,0	9025	49,00	665,0
8	50	5,0	2500	25,00	250,0

1	2	3	4	5	6
9	134	6,4	17956	40,96	857,6
10	120	8,0	14400	64,00	960,0
11	74	6,0	5476	36,00	444,0
12	140	7,8	19600	60,84	1092,0
13	110	6,2	12100	38,44	682,0
14	60	5,8	3600	33,64	348,0
15	86	6,0	7396	36,00	516,0
$\sum_{i=1}^{15}$	1350	96,0	146482	640,78	9261,1

Используя полученные суммы по столбцам, вычислим статистические характеристики:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1350}{15} = 90; \ \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{96}{15} = 6{,}4;$$

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{146478}{15} - 90^2 = 1665{,}20;$$

$$s_y^2 = \overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2 = \frac{640{,}78}{15} - (6{,}4)^2 \approx 1{,}425;$$

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{1665{,}20} \approx 40{,}81; \ s_y = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{1{,}425} \approx 1{,}19;$$

$$K_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{9261{,}1}{15} - 90 \cdot 6{,}4 \approx 41{,}01;$$

$$r = \frac{K_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{41{,}01}{40{,}81 \cdot 1{,}19} \approx 0{,}84.$$

2. Проверим значимость полученного выборочного коэффициента корреляции по t-критерию Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}84\sqrt{15-2}}{\sqrt{1-(0{,}84)^2}} \approx 5{,}58.$$

По таблицам квантилей распределения Стьюдента по наиболее употребляемому в технике уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы $\nu = n - 2 = 15 - 2 = 13$ находим критическое значение критерия Стьюдента

$$t_{\text{кр}} = t_{\alpha;\,\nu} = t_{0{,}05;16} = 2{,}12.$$

Так как $t_{\text{набл}} = 5{,}58 > t_{\text{кр}} = 2{,}12$, то выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля.

Значение коэффициента корреляции попало в интервал от 0,7 до 0,9 таблицы Чеддока (табл. П6), т.е. связь между признаками Y и X высокая.

3. По приведенным данным строим диаграмму рассеяния.

Для этого на плоскость xOy наносим 15 точек, координаты которых заданы в условии: $(x_1; y_1)$ = (150; 7,2), $(x_2; y_2)$ = (38; 5,8), $(x_3; y_3)$ = (85; 7,5), ..., (x_{15};

y_{15}) = (86; 6,0) (см. Рис. 4. На этом же рисунке начертим, после получения уравнений, и линии регрессии.)

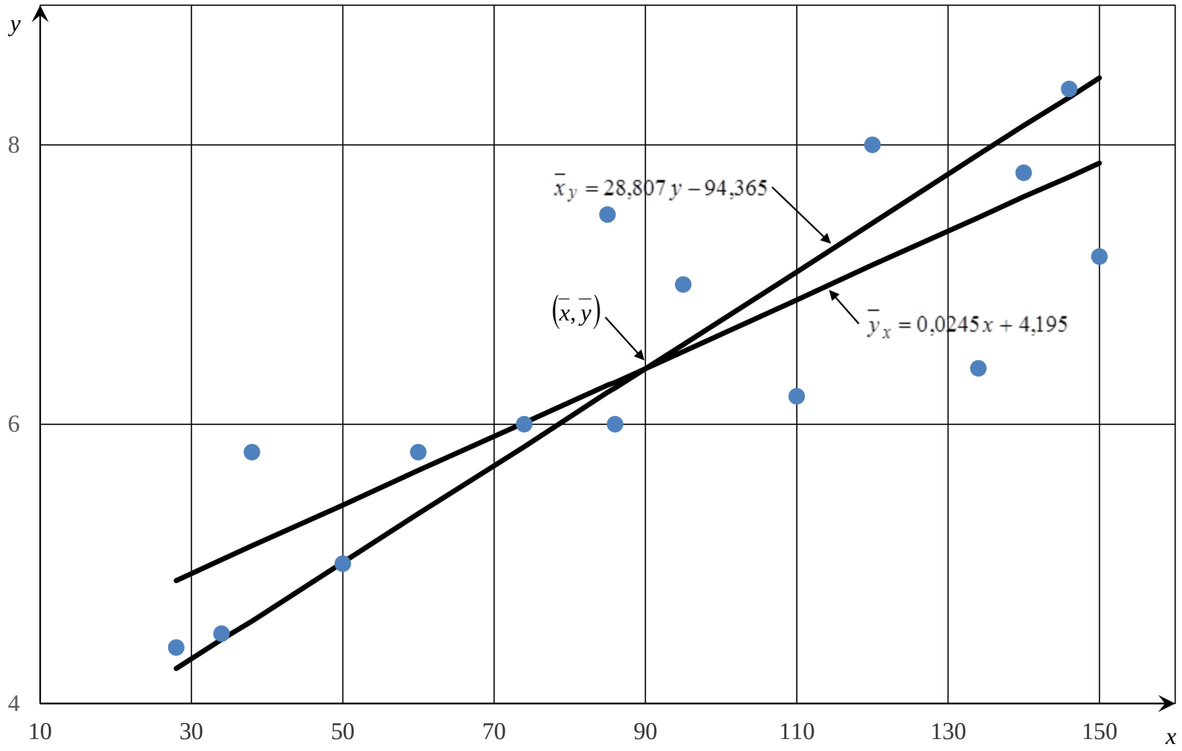

Рис. 4

4. Из диаграммы рассеяния видно, что связь между признаками Y и X можно принять линейной. Находить уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y будем в виде

$$\bar{y}_x = \rho_{xy}x + a \text{ и } \bar{x}_y = \rho_{yx}y + b$$

соответственно. Параметры этих уравнений вычисляются по формулам

$$\rho_{xy} = r_{\text{В}}\frac{s_y}{s_x},\ a = \bar{y} - \rho_{xy}\bar{x};$$

$$\rho_{yx} = r_{\text{В}}\frac{s_x}{s_y},\ b = \bar{x} - \rho_{yx}\bar{y}.$$

Таким образом, имеем

$$\rho_{xy} = 0{,}84\cdot\frac{1{,}19}{40{,}81} \approx 0{,}0245;\ a = 6{,}4 - 0{,}0245\cdot 90 \approx 4{,}186;$$

$$\rho_{yx} = 0{,}84\cdot\frac{40{,}81}{1{,}19} \approx 28{,}807;\ b = 90 - 28{,}807\cdot 6.4 \approx -94{,}365.$$

Контроль вычислений по формуле (7):

$$\sqrt{\rho_{xy}\cdot\rho_{yx}} = \sqrt{0{,}0245\cdot 28{,}807} \approx 0{,}84 = r_{\text{В}}.$$

Тогда линейные уравнения регрессии имеют вид:

Y на X

$$\bar{y}_x = 0{,}0245x + 4{,}195$$

иX на Y

$$\overline{x}_y = 28{,}807y - 94{,}365.$$

По полученным линейным уравнениям регрессии на диаграмме рассеяния строим прямые линии регрессии (см. Рис. 4).

Пример 3. В табл. 7 приводятся результаты измерения предела прочности (Y, кг/мм^2) и предела текучести (X, кг/мм^2) 50 марок стали.

Таблица 7

y \ x		предел текучести						n_y
		40	60	80	100	120	140	
предел прочности	160					1	3	4
	140				3	5		8
	120			4	8	1		13
	100		2	7	4			13
	80	1	3	3				7
	60	4	1					5
	n_x	5	6	14	15	7	3	n=50

Требуется:

1. По данным, приведённым в таблице, вычислить числовые характеристики величин X и Y: средние $\overline{x}$, $\overline{y}$; средние квадратические отклонения s_x, s_y, корреляционный момент K_{xy}, коэффициент корреляции r.

2. Проверить значимость коэффициента корреляции.

3. Построить диаграмму рассеяния и по характеру расположения точек на диаграмме подобрать общий вид функции регрессии.

4. Найти эмпирические функции регрессии Y на X и X на Y и построить их графики.

Решение.

1. Вычисление числовых характеристик для группированной выборки проведем по следующим формулам:

выборочные средние

$$\overline{x} = \frac{\sum n_{x_i} \cdot x_i}{n} = \frac{5 \cdot 40 + 6 \cdot 60 + 14 \cdot 80 + 15 \cdot 100 + 7 \cdot 120 + 3 \cdot 140}{50} = 88{,}80;$$

$$\overline{y} = \frac{\sum n_{y_j} \cdot y_j}{n} = \frac{4 \cdot 160 + 8 \cdot 140 + 13 \cdot 120 + 13 \cdot 100 + 7 \cdot 80 + 5 \cdot 60}{50} = 109{,}60;$$

выборочные дисперсии

$$s_x^2 = \frac{\sum n_{x_i} \cdot x_i^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{5 \cdot 40^2 + 6 \cdot 60^2 + 14 \cdot 80^2 + 15 \cdot 100^2 + 7 \cdot 120^2 + 3 \cdot 140^2}{50} - (88{,}80)^2 = 690{,}56;$$

$$s_y^2 = \frac{\sum n_{y_j} \cdot y_j^2}{n} - \left(\bar{y}\right)^2 =$$

$$= \frac{4 \cdot 160^2 + 8 \cdot 140^2 + 13 \cdot 120^2 + 13 \cdot 100^2 + 7 \cdot 80^2 + 5 \cdot 60^2}{50} - (109{,}60)^2 = 771{,}84;$$

выборочные средние квадратические отклонения

$$s_x = \sqrt{690{,}56} \approx 26{,}28; \; s_y = \sqrt{771{,}84} \approx 27{,}78;$$

выборочный корреляционный момент

$$K_{xy} = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} =$$

$$= \frac{1}{50}(1 \cdot 120 \cdot 160 + 3 \cdot 140 \cdot 160 + 3 \cdot 100 \cdot 140 + 5 \cdot 120 \cdot 140 + 4 \cdot 80 \cdot 120 +$$

$$+ 8 \cdot 100 \cdot 120 + 1 \cdot 120 \cdot 120 + 2 \cdot 60 \cdot 100 + 7 \cdot 80 \cdot 100 + 1 \cdot 40 \cdot 80 + 3 \cdot 60 \cdot 80 +$$

$$+ 3 \cdot 80 \cdot 80 + 4 \cdot 40 \cdot 60 + 1 \cdot 60 \cdot 60) - 88{,}80 \cdot 109{,}60 = 651{,}52;$$

выборочный коэффициент корреляции

$$r = \frac{K_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{651{,}52}{26{,}28 \cdot 27{,}28} \approx 0{,}89.$$

2. Проверим значимость полученного выборочного коэффициента корреляции по t-критерию Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}89\sqrt{50-2}}{\sqrt{1-(0{,}89)^2}} \approx 13{,}52.$$

По таблицам квантилей распределения Стьюдента по наиболее употребляемому в технике уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = n - 2 = 50 - 2 = 48$ находим критическое значение критерия Стьюдента

$$t_{\text{кр}} = t_{\alpha;\,\nu} = t_{0{,}05;48} = 2{,}02.$$

Так как $t_{\text{набл}} = 13{,}52 > t_{\text{кр}} = 2{,}02$, то выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля.

По таблице Чеддока (табл. П6) определяем, что связь между исследуемыми величинами X и Y высокая.

3. Для подтверждения линейной регрессионной зависимости между исследуемыми величинами X и Y построим диаграмму рассеяния. Изобразим результаты измерений (x_i, y_j) в виде точек в декартовой системе координат (Рис. 5). Расположение точек на диаграмме рассеяния подтверждает гипотезу о наличии линейной регрессионной зависимости между пределом текучести (X) и пределом прочности (Y).

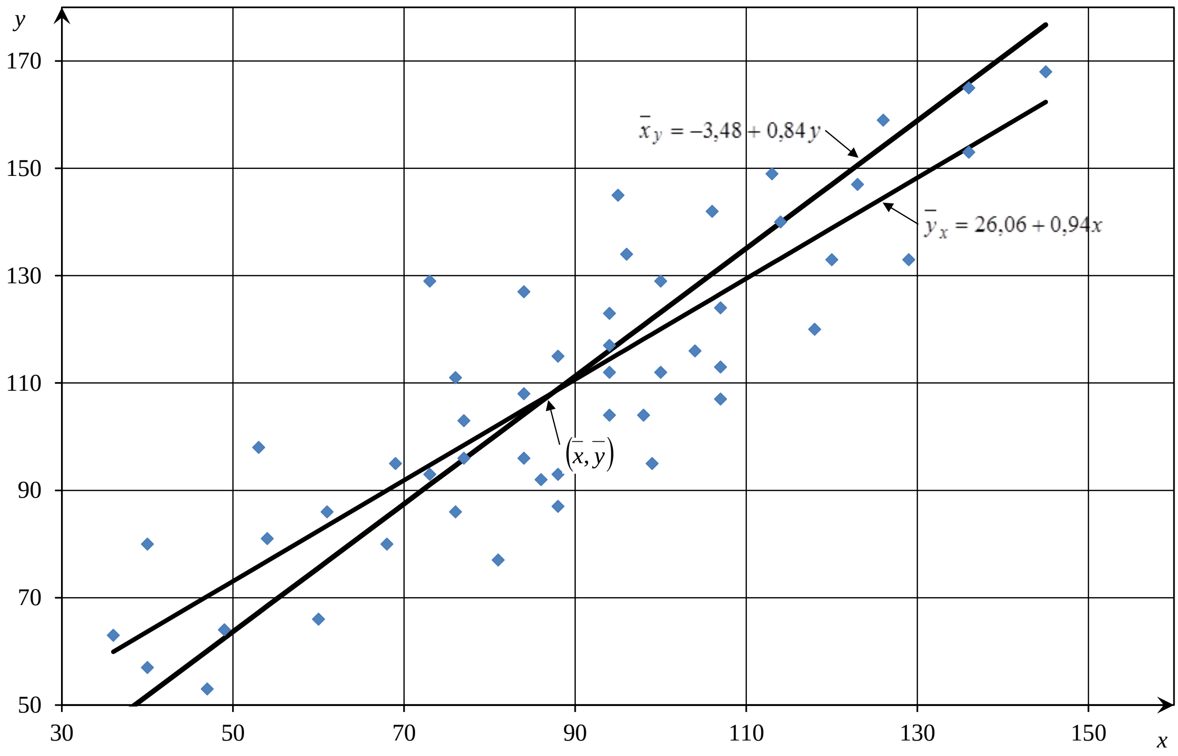

Рис. 5

4. Найдём эмпирические линейные уравнения регрессии Y на X:

$$\bar{y}_x = \bar{y} + r_{\text{В}} \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) = 109{,}60 + 0{,}89\frac{27{,}78}{26{,}28}(x - 88{,}80);$$

$$\bar{y}_x = 26{,}06 + 0{,}94x;$$

иX наY:

$$\bar{x}_y = \bar{x} + r_{\text{В}} \frac{s_x}{s_y}(y - \bar{y}) = 88{,}80 + 0{,}89\frac{26{,}28}{27{,}78}(y - 190{,}60);$$

$$\bar{x}_y = -3{,}48 + 0{,}84y.$$

Контроль вычислений по формуле (7):

$$\sqrt{\rho_{xy} \cdot \rho_{yx}} = \sqrt{0{,}94 \cdot 0{,}84} \approx 0{,}89 = r_{\text{В}}.$$

Графики найденных эмпирических функций построены на рис. 4.

П Р И Л О Ж Е Н И Я

Таблица П.1

Значения функции $P(x=m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	01638	0,0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004

m \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7				0,0001	0,0034	0,0216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10						0,0008
11						0,0002
12						0,0001

m \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	00842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		0,0022	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17			0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18				0,0002	0,0009	0,0029
19					0,0004	0,0014
20					0,0002	0,0006
21						0,0001

Таблица П.2

Значения функции $P(m \le k) = \sum_{m=0}^{k} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$

k \ *a*	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9983	0,9966
4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996
5				1,0000	1,0000	1,0000

k \ *a*	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**2,0**	**3,0**
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358	0,4060	0,1991
2	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197	0,6767	0,4232
3	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810	0,8571	0,6472
4	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963	0,9473	0,8153
5	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9834	0,9161
6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9955	0,9665
7				1,0000	0,9989	0,9881
8					0,9998	0,9962
9					1,0000	0,9989
10						0,9997
11						0,999
12						1,0000

k \ *a*	**4,0**	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012
2	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062
3	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212
4	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550
5	0,7851	0,6160	0,4457	0,3008	0,1912	0,1157
6	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3133	0,2068
7	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239
8	0,9786	0,9318	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557
9	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874
10	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060
11	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030
12	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758
13	1,0000	0,9992	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261
14		0,9998	0,9986	0,9943	0,9837	0,9585
15		1,0000	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780
16			0,9998	0,9990	0,9963	0,9889
17			0,9999	0,9996	0,9984	0,9947
18			1,0000	0,9999	0,9994	0,9976
19				1,0000	0,9997	0,9989
20					0,9999	0,9996
21					1,0000	0,9998

Таблица П.3

Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ **и** $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	**0,40**	0,3683	0,1554	**0,80**	0,2897	0,2881
0,01	0,3989	0,0040	0,41	0,3668	0,1591	0,81	0,2874	0,2910
0,02	0,3989	0,0080	0,42	0,3653	0,1628	0,82	0,2850	0,2939
0,03	0,3988	0,0120	0,43	0,3637	0,1664	0,83	0,2827	0,2967
0,04	0,3986	0,0160	0,44	0,3621	0,1700	0,84	0,2803	0,2995
0,05	0,3984	0,0199	0,45	0,3605	0,1736	0,85	0,2780	0,3023
0,06	0,3982	0,0239	0,46	0,3589	0,1772	0,86	0,2756	0,3051
0,07	0,3980	0,0279	0,47	0,3572	0,1808	0,87	0,2732	0,3078
0,08	0,3977	0,0319	0,48	0,3555	0,1844	0,88	0,2709	0,3106
0,09	0,3973	0,0359	0,49	0,3538	0,1879	0,89	0,2685	0,3133
0,10	0,3970	0,0398	**0,50**	0,3521	0,1915	**0,90**	0,2661	0,3159
0,11	0,3965	0,0438	0,51	0,3503	0,1950	0,91	0,2637	0,3186
0,12	0,3961	0,0478	0,52	0,3485	0,1985	0,92	0,2613	0,3212
0,13	0,3956	0,0517	0,53	0,3467	0,2019	0,93	0,2589	0,3238
0,14	0,3951	0,0557	0,54	0,3448	0,2054	0,94	0,2565	0,3264
0,15	0,3945	0,0596	0,55	0,3429	0,2088	0,95	0,2541	0,3289
0,16	0,3939	0,0636	0,56	0,3410	0,2123	0,96	0,2516	0,3315
0,17	0,3932	0,0675	0,57	0,3391	0,2157	0,97	0,2492	0,3340
0,18	0,3925	0,0714	0,58	0,3372	0,2190	0,98	0,2468	0,3365
0,19	0,3918	0,0753	0,59	0,3352	0,2224	0,99	0,2444	0,3389
0,20	0,3910	0,0793	**0,60**	0,3332	0,2257	**1,00**	0,2420	0,3413
0,21	0,3902	0,0832	0,61	0,3312	0,2291	1,01	0,2396	0,3438
0,22	0,3894	0,0871	0,62	0,3292	0,2324	1,02	0,2371	0,3461
0,23	0,3885	0,0910	0,63	0,3271	0,2357	1,03	0,2347	0,3485
0,24	0,3876	0,0948	0,64	0,3251	0,2389	1,04	0,2323	0,3508
0,25	0,3867	0,0987	0,65	0,3230	0,2422	1,05	0,2299	0,3531
0,26	0,3857	0,1026	0,66	0,3209	0,2454	1,06	0,2275	0,3554
0,27	0,3847	0,1064	0,67	0,3187	0,2486	1,07	0,2251	0,3577
0,28	0,3836	0,1103	0,68	0,3166	0,2517	1,08	0,2227	0,3599
0,29	0,3825	0,1141	0,69	0,3144	0,2549	1,09	0,2203	0,3621
0,30	0,3814	0,1179	**0,70**	0,3123	0,2580	**1,10**	0,2179	0,3643
0,31	0,3802	0,1217	0,71	0,3101	0,2611	1,11	0,2155	0,3665
0,32	0,3790	0,1255	0,72	0,3079	0,2642	1,12	0,2131	0,3686
0,33	0,3778	0,1293	0,73	0,3056	0,2673	1,13	0,2107	0,3708
0,34	0,3765	0,1331	0,74	0,3034	0,2703	1,14	0,2083	0,3729
0,35	0,3752	0,1368	0,75	0,3011	0,2734	1,15	0,2059	0,3749
0,36	0,3739	0,1406	0,76	0,2989	0,2764	1,16	0,2036	0,3770
0,37	0,3725	0,1443	0,77	0,2966	0,2794	1,17	0,2012	0,3790
0,38	0,3712	0,1480	0,78	0,2943	0,2823	1,18	0,1989	0,3810
0,39	0,3697	0,1517	0,79	0,2920	0,2852	1,19	0,1965	0,3830

Продолжение табл. П.3

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	**1,70**	0,0940	0,4554	**2,40**	0,0224	0,4918
1,71	0,1919	0,3869	1,71	0,0925	0,4564	2,42	0,0213	0,4922
1,77	0,1895	0,3888	1,72	0,0909	0,4573	2,44	0,0203	0,4927
1,73	0,1872	0,3907	1,73	0,0898	0,4582	2,46	0,0194	0,4931
1,74	0,1849	0,3925	1,74	0,0878	0,4591	2,48	0,0184	0,4934
1,75	0,1825	0,3944	1,75	0,0863	0,4599	**2,50**	0,0175	0,4938
1,76	0,1804	0,3962	1,76	0,0848	0,4608	2,52	0,0167	0,4941
1,77	0,1781	0,3980	1,77	0,0833	0,4616	2,54	0,0158	0,4945
1,78	0,1758	0,3997	1,78	0,0818	0,4625	2,56	0,0151	0,4948
1,79	0,1736	0,4015	1,79	0,0804	0,4633	2,58	0,0143	0,4951
1,30	0,1714	0,4032	**1,80**	0,0790	0,4641	**2,60**	0,0135	0,4953
1,31	0,1691	0,4049	1,81	0,0775	0,4649	2,62	0,0129	0,4955
1,32	0,1669	0,4066	1,82	0,0761	0,4656	2,64	0,0122	0,4959
1,33	0,1647	0,4082	1,83	0,0748	0,4664	2,66	0,0116	0,4961
1,34	0,1626	0,4099	1,84	0,0734	0,4671	2,68	0,0110	0,4963
1,35	0,1604	0,4115	1,85	0,0721	0,4678	**2,70**	0,0104	0,4965
1,36	0,1582	0,4131	1,86	0,0707	0,4686	2,72	0,0099	0,4967
1,37	0,1561	0,4147	1,87	0,0694	0,4693	2,74	0,0093	0,4969
1,38	0,1539	0,4162	1,88	0,0681	0,4699	2,76	0,0088	0,4971
1,39	0,1518	0,4177	1,89	0,0669	0,4706	2,78	0,0084	0,4973
1,40	0,1497	0,4192	**1,90**	0,0656	0,4713	**2,80**	0,0079	0,4974
1,41	0,1476	0,4207	1,91	0,0644	0,4719	2,82	0,0075	0,4976
1,42	0,1456	0,4222	1,92	0,0632	0,4726	2,84	0,0071	0,4977
1,43	0,1435	0,4236	1,93	0,0620	0,4732	2,86	0,0067	0,4979
1,44	0,1415	0,4251	1,94	0,0608	0,4738	2,88	0,0063	0,4980
1,45	0,1394	0,4265	1,95	0,0596	0,4744	**2,90**	0,0060	0,4981
1,46	0,1374	0,4279	1,96	0,0584	0,4750	2,92	0,0056	0,4982
1,47	0,1354	0,4292	1,97	0,0573	0,4756	2,94	0,0053	0,4984
1,48	0,1334	0,4306	1,98	0,0562	0,4761	2,96	0,0050	0,4985
1,49	0,1315	0,4319	1,99	0,0551	0,4767	2,98	0,0047	0,4986
1,50	0,1295	0,4332	**2,00**	0,0540	0,4772	**3,00**	0,00443	0,49865
1,51	0,1276	0,4345	2,02	0,0519	0,4783	3,10	0,00327	0,49903
1,52	0,1257	0,4357	2,04	0,0498	0,4793	3,20	0,00238	0,49931
1,53	0,1238	0,4370	2,06	0,0478	0,4803	3,30	0,00172	0,49952
1,54	0,1219	0,4382	2,08	0,0459	0,4812	3,40	0,00123	0,49966
1,55	0,1200	0,4394	**2,10**	0,0440	0,4821	3,50	0,00087	0,49977
1,56	0,1182	0,4406	2,12	0,0422	0,4830	3,60	0,00061	0,49984
1,57	0,1163	0,4418	2,14	0,0404	0,4838	3,70	0,00042	0,49989
1,58	0,1145	0,4429	2,16	0,0387	0,4846	3,80	0,00029	0,49993
1,59	0,1127	0,4441	2,18	0,0371	0,4854	3,90	0,00020	0,49995
1,60	0,1109	0,4452	**2,20**	0,0355	0,4861	**4,00**	0,0001338	0,499968
1,61	0,1092	0,4463	2,22	0,0339	0,4868	4,50	0,0000160	0,499997
1,62	0,1074	0,4474	2,24	0,0325	0,4875	5,00	0,0000015	0,49999997
1,63	0,1057	0,4484	2,26	0,0310	0,4881			
1,64	0,1040	0,4495	2,28	0,0297	0,4887			
1,65	0,1023	0,4505	**2,30**	0,0283	0,4893			
1,66	0,1006	0,4515	2,32	0,0270	0,4898			
1,67	0,0989	0,4525	2,34	0,0258	0,4904			
1,68	0,0973	0,4535	2,36	0,0246	0,4909			
1,69	0,0957	0,4545	2,38	0,0235	0,4913			

Таблица П.4

Коэффициент доверия $t_{\alpha;\nu}$

для заданных значений числа степеней свободы ν и уровня значимости α

ν	α			ν	α		
	0,10	**0,05**	**0,01**		**0,10**	**0,05**	**0,01**
1	6,31	12,71	63,66	**14**	1,76	2,15	2,98
2	2,92	4,30	9,92	**16**	1,75	2,12	2,91
3	2,35	3,18	5,84	**18**	1,73	2,10	2,88
4	2,13	2,78	4,60	**20**	1,73	2,09	2,85
5	2,02	2,57	4,03	**22**	1,72	2,07	2,82
6	1,94	2,45	3,71	**24**	1,71	2,06	2,80
7	1,90	2,37	3,50	**26**	1,71	2,06	2,78
8	1,86	2,31	3,36	**28**	1,70	2,05	2,76
9	1,83	2,26	3,25	**30**	1,70	2,04	2,75
10	1,81	2,23	3,17	**40**	1,68	2,02	2,70
11	1,80	2,20	3,11	**60**	1,67	2,00	2,66
12	1,78	2,18	3,06	**120**	1,66	1,98	2,62
13	1,77	2,16	3,02	**∞**	1,66	1,96	2,58

Таблица П.5

χ^2-распределение

ν	α			ν	α		
	0,10	**0,05**	**0,01**		**0,10**	**0,05**	**0,01**
1	2,71	3,84	6,63	**16**	23,54	26,30	32,00
2	4,61	5,99	9,21	**17**	24,77	27,59	33,41
3	6,25	7,81	11,34	**18**	25,99	28,87	34,81
4	7,78	9,49	13,28	**19**	27,20	30,14	36,19
5	9,24	11,07	15,09	**20**	28,41	31,41	37,57
6	10,64	12,59	16,81	**21**	29,62	32,67	38,93
7	12,02	14,07	18,48	**22**	30,81	33,92	40,29
8	13,36	15,51	20,09	**23**	32,01	35,17	41,64
9	14,68	16,92	21,67	**24**	33,20	36,42	42,98
10	15,99	18,31	23,21	**25**	34,38	37,65	44,31
11	17,28	19,68	24,72	**26**	35,56	38,89	45,64
12	18,55	21,03	26,22	**27**	36,74	40,11	46,96
13	19,81	22,36	27,69	**28**	37,92	41,34	48,28
14	21,06	23,68	29,14	**29**	39,09	42,56	49,59
15	22,31	25,00	30,58	**30**	40,26	43,77	50,89

Таблица 6

Таблица Чеддока

Диапазон изменения $\|r_В\|$:	<0,3	0,3—0,5	0,5—0,7	0,7—0,9	>0,9
Характер тесноты связи	Слабая	Умеренная	Заметная	Высокая	Весьма высокая

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Понятия, обозначения	**Содержание, формула**
1	2
Перестановки. Число перестановок	Соединения, отличающиеся только порядком элементов, называются перестановками. Число перестановок из n элементов $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ $0! = 1$
Размещения. Число размещений	Соединения из n различных элементов по m, отличающихся друг от друга составом элементов либо их порядком, называются размещениями. Число размещений из n по m $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
Сочетания. Число сочетаний	Соединения из n различных элементов по m, отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом, называются сочетаниями. Число сочетаний из n по m $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ $C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^0 = 1; C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$; $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.
Стохастический эксперимент	Это опыт (испытание), результат которого заранее не определен
Достоверное событие	Результат, который обязательно наступает при осуществлении данного комплекса условий (опыта, эксперимента) называется достоверным событием
Случайное событие	Это событие, которое может произойти, а может и не произойти в данном испытании
Невозможное событие	Это событие, которое не может произойти при данном комплексе условий
Относительная частота события A	Отношение $\nu(A) = \dfrac{m}{n}$ числа экспериментов m, завершившихся событием A, к общему числу n проведенных экспериментов

1	2
Статистическое определение вероятности	Если при неограниченном увеличении числа экспериментов относительная частота события $\nu(A)$ стремится к некоторому фиксированному числу, то событие A стохастически устойчиво и это число $p(A)$ называют вероятностью события A
Определение вероятности в классической схеме	$P(A)=\dfrac{m}{n}$, где m — число исходов стохастического эксперимента, благоприятствующих наступлению события A, n — общее число всех равновозможных исходов
Вероятность суммы (объединения), двух событий A и B	$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
Вероятность произведения двух зависимых событий A и B	$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A\vert B)$, где $P(B\vert A)$ — условная вероятность события B при условии, что событие A с ненулевой вероятностью произошло
Независимые события A и B	Это такие события, для которых $P(B\vert A)=P(B)$ и $P(A\vert B)=P(A)$. Следовательно, $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$
Схема Бернулли	Стохастический эксперимент состоит из последовательности n независимых и одинаковых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A или событие, ему противоположное $\overline{A}$ с вероятностями соответственно равными p и $q=1-p$
Формула Бернулли	Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появится ровно m раз $P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$ Вероятность того, что при n испытаниях A появляется не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле: $P_n(m_1\le m\le m_2)=\sum\limits_{m=m_1}^{m_2}C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$
Формула Пуассона	При достаточно большом n и малом p (если $a=np<10$) $P_n(m)\approx\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$ (таблица П1) $P_n(m\le k)\approx e^{-a}\sum\limits_{m=0}^{k}\dfrac{a^m}{m!}$ (таблица П2)

1	2
Локальная формула Муавра-Лапласа	При достаточно большом n и не слишком малых p и q $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ и $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(-x) = \varphi(x)$ (таблица П3)
Интегральная формула Муавра — Лапласа	$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$; $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (таблица П4)
Понятие случайной величины	Случайной величиной называют переменную величину, которая принимает числовые значения в зависимости от исходов испытания случайным образом.
Понятие дискретной случайной величины (ДСВ X)	ДСВ X — случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, то есть численные значения которой образуют конечное или счетное множество.
Закон распределения дискретной случайной величины	Соответствие между значениями $x_1, x_2, \ldots$ дискретной случайной величины и их вероятностями $p_1, p_2, \ldots$ называется законом распределения и может быть задан таблично или аналитически (то есть с помощью формул). Если ДСВ X принимает конечное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то ее закон распределения определяется формулами $P(X = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ Если ДСВ X принимает бесконечную последовательность значений $x_1, x_2, x_3 \ldots$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots,$, то ее закон распределения определяется формулами $P(X = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$
Понятие непрерывной случайной величины (НСВ X)	НСВ X — случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого промежутка, то есть множество значений непрерывной случайной величины несчетно.

1	2
Функция распределения. Свойства функции распределения	Функцией распределения случайной величины X называется функция действительного переменного x, определяемая равенством $F(x)=P(X<x)$, где $P(X<x)$ – вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньше x. Функция распределения $F(x)$ для ДСВ X, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ имеет вид $F(x)=\sum\limits_{x_k<x} P(X<x_k)$, где символ $x_k<x$ означает, что суммируются вероятности p_k тех значений, которые меньше x. Функция является разрывной. Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ является непрерывно дифференцируемой. Вероятность того, что СВХ примет значение из промежутка $\left[\alpha;\beta\right)$, равна разности значений ее функции распределения на концах этого полуинтервала: $P(\alpha \le X < \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$ Свойства функции распределения 1. $0 \le F(x) \le 1$ 2. Если $x_1<x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$, то есть функция распределения является неубывающей. 3. Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x)=F(x_0)$; $F(x_0-0)=F(x_0)$ 4. Если все возможные значения СВХ принад-лежат интервалу $(a;b)$, то $F(x)=0$ при $x \le a$, $F(x)=1$ при $x \ge b$ 5. Если все возможные значения СВХ принад-лежат бесконечному интервалу $\left(-\infty;+\infty\right)$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=0; \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)=1;$

1	2
Функция распределения. Свойства функции распределения	Если X — непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно заданное определенное значение, равна нулю: $P(X=\alpha)=0$ Отсюда следует, что для непрерывной случайной величины выполняются равенства: $P(\alpha<X<\beta)=P(\alpha\le X\le\beta)=P(\alpha\le X<\beta)=$ $=P(\alpha<X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$
Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Свойства функции плотности распределения.	Плотностью распределения (дифференциальной функцией распределения) вероятностей НСВ X в точке x называют предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $\left(x;x+\Delta x\right)$ к длине Δx этого интервала, когда последняя стремится к нулю: $f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}$ Следовательно, $f(x)=F'(x)$, то есть плотность распределения есть первая производная от функции распределения НСВХ. Вероятность того, что НСВХ примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, определяется равенством $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)dx.$ Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$ Свойства функции плотности 1. Плотность распределения $f(x)$ – неотрицательная функция, то есть $f(x)\ge 0.$ 2. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку $\left(-\infty;+\infty\right)$ от функции плотности вероятностей равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$ 3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $\left[\alpha;\beta\right]$, то $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=1$, так как вне этого промежутка $f(x)=0.$

1	2
Математическое ожидание	Для ДСВ X равно сумме произведений всех ее значений на соответствующие вероятности: $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. Для НСВ $X: M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, где $f(x)=F'(x)$ — функция плотности распределения вероятности.
Свойства математического ожидания	1) $M(C)=C$, если $C=const$, 2) $M(CX)=CM(X)$, 3) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$, 4) Если X и Y — независимые случайные величины, то $M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$.
Дисперсия случайной величины	Разность $X-M(X)$ называется отклонением случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)=a$. Математическое ожидание отклонения равно нулю: $M(X-a)=0$ Дисперсией, или рассеянием случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения: $D(X)=M((X-a)^2)$. Следовательно, для любой случайной величины X: $D(X)\geq 0$
Свойства дисперсии	1) $D(C)=0$, $C=const$, 2) $D(CX)=C^2D(X)$, $C=const$, 3) Если случайные величины X и Y независимы, то $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$, 4) $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$, 5) $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.
Среднеквадратическое отклонение	Среднеквадратическим отклонением, или стандартным отклонением, случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \Leftrightarrow D(X)=\sigma^2$.

1	2
Биномиальное распределение	Закон распределения дискретной случайной величины, определяемой формулой Бернулли $p_k = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} (k = 0, 1, 2, ..., n)$ называется биномиальным. Постоянные n, p называются параметрами биномиального распределения $(q = 1 - p)$. $M(X) = np; D(X) = npq; \sigma(X) = \sqrt{npq}$
Распределение Пуассона	Распределением Пуассона называется распределение вероятностей дискретной случайной величины, определяемое формулой Пуассона $P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$, где $a = np$ — параметр распределения. $M(X) = a; D(X) = a$.
Равномерное распределение на интервале $(a;b)$	Если значения случайной величины, которые она принимает в конечном промежутке $(a;b)$, возможны в одинаковой степени, то плотность распределения вероятностей этой величины постоянна на данном промежутке и равна нулю вне этого промежутка, то есть $f(x) = \begin{cases} C & \text{на } [a,b], \\ 0 & \text{вне } (a,b). \end{cases}$ $C = \frac{1}{b-a}$. $M(X) = \frac{a+b}{2}$; $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$; $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Геометрическое распределение	Геометрическим называется распределение дискретной случайной величины X, определяемое формулой $P(X = m) = (1-p)^{m-1} \cdot p$, где $0 < p < 1$, и $m = 1, 2, 3...$ (Вероятности образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1 - p$). $M(X) = \frac{1}{p}$; $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$

1	2
Показательное распределение	Показательным называется распределение с плотностью вероятностей, определяемой по формуле $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$ где $\lambda>0$ - параметр распределения. $M(X)=\frac{1}{\lambda}$; $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$. Замечание. Если T — время безотказной работы элемента, λ – интенсивность отказов, то случайная величина T распределена по экспоненциальному закону с функцией распределения $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$, где $\lambda>0$. $F(t)$ определяет вероятность отказа элемента за время t. Вероятность безотказной работы элемента за время t равна $e^{-\lambda t}$. Функция $R(t)=e^{-\lambda t}$ называется функцией надежности.
Нормальное распределение $N(a;\sigma)$	Нормальным распределением, или распределением Гаусса, называется распределение с плотностью вероятностей $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ Постоянные a и σ $(\sigma>0)$ называются параметрами нормального распределения. $M(X)=a$; $D(X)=\sigma^2$; $\sigma=\sqrt{D(X)}$ Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервале $(\alpha;\beta)$ определяется формулой $P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-\alpha}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа. $M(X)=a$; $D(X)=\sigma^2$.
Нормированное распределение $N(0;1)$	Нормированным или стандартным называется такое нормальное распределение непрерывной случайной величины, когда функция плотности вероятностей $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$. $M(X)=a=0$; $\sigma(X)=\sigma=1$.

1	2
Мода случайной величины $\overline{M}$	Модой ДСВ X называется ее наиболее вероятное значение. Модой НСВ X называется то ее значение, при котором плотность распределения вероятностей максимальна.
Медиана M_e	Медианой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение M_e, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше M_e, то есть $P(x<M_e)=P(x>M_e)=0{,}5$. Если прямая $x=a$ является осью симметрии кривой распределения $f(x)$, то $\overline{M}=M_e=M(X)=a$.
Начальные моменты ν_k	Начальным моментом ν_k k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени этой случайной величины: $\nu_k=M(X^k)$. Для ДСВ X: $\nu_k=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k\cdot p_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$. Начальный момент k-го порядка НСВ X с плотностью распределения $f(x)$ определяется формулой : $\nu_k=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx$, где $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.
Центральные моменты μ_k	Центральным моментом μ_k k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени отклонения этой величины от ее математического ожидания. Если обозначить $M(X)=a$, то $\mu_k=M((X-a)^k)$ Для ДСВ X: $\mu_k=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^k\cdot p_i$, если множество этой величины конечно, а если — счетно, то $\mu_k=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i-a)^k\cdot p_i$. Для НСВ X с плотностью распределения $f(x)$ центральный момент k-го порядка опре-деляется формулой: $\mu_k=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_i-a)^k\cdot f(x)dx$.

1	2
Некоторые свойства начальных и центральных моментов	$\nu_0 = 1; \nu_1 = M(X)$, $\mu_0 = 1; \mu_1 = 0; \ \mu_2 = D(X)$, $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$, $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$, $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$.
Асимметрия	Отношение центрального момента 3-го порядка к кубу среднеквадратического отклонения случайной величины называется асимметрией: $A(X) = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$. Если распределение случайной величины симметрично относительно ее математического ожидания, то асимметрия равна нулю.
Эксцесс	Эксцессом случайной величины называется величина $Э_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Для нормального распределения $Э_x = 0$. Кривые, более островершинные по сравнению с нормальной кривой Гаусса, имеют $Э_x > 0$. У более плосковершинных кривых $Э_x < 0$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

2 курс, 3 семестр (Теория вероятностей)

1. Пространство элементарных событий.
2. Классическое определение вероятности события.
3. Основные формулы комбинаторики.
4. Геометрические вероятности.
5. Теорема умножения вероятностей.
6. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
7. Вероятность наступления хотя бы одного события.
8. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
9. Формула полной вероятности.
10. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса.
11. Независимые испытания. Формула Бернулли.
12. Локальная теорема Лапласа.
13. Формула Пуассона.
14. Интегральная теорема Лапласа.
15. Закон больших чисел.
16. Дискретные случайные величины: основные понятия.
17. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Вероятностный смысл математического ожидания. Свойства математического ожидания.
18. Дисперсия дискретной случайной величины. Свойства дисперсии ДСВ. Среднее квадратическое отклонение.
19. Начальные и центральные теоретические моменты.
20. Непрерывная случайная величина. Функция распределения.
21. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
22. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Асимметрия и эксцесс.
23. Равномерное распределение. Показательное распределение.
24. Нормальное распределение.
25. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.
26. Вероятность заданного отклонения. Правило «трех сигм».

Математическая статистика

1. Задачи математической статистики. Выборочный метод.
2. Статистическое распределение выборки.
3. Статистическая функция распределения. Полигон и гистограмма.
4. Статистические оценки параметров распределения.
5. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки.
6. Генеральная средняя. Выборочная средняя.
7. Генеральная дисперсия. Выборочная дисперсия.
8. Характеристики вариационного ряда.
9. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал.
10. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ.
11. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по несгруппированным данным.
12. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства.
13. Случаи криволинейной корреляционной зависимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1963.

2. Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. — М.: Высшая школа, 1966.

3. Гурский В.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. — МН.: Высшая школа, 1984.

4. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей. Спровочное пособие к решению задач. — МН.: ТетраСистемс, 2002.

5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.

6. Копылов Г.Н., Суханова Н.Н. Задачник по теории вероятностей. – Волгоград: ВолГУ, 1997.

7. Космачева И.М. Задачи теории вероятностей и математической статистики. — Астрахань: Гостехуниверситет, 2002.

8. Макарова Е.Л. Задачник — практикум по теории вероятностей. – Волгоград: Перемена, 2002.

9. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1960.

10. Студенецкая В.Н. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. — Волгоград: Учитель, 2005.

11. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1987.