

Оглавление

Правила оформления и сдачи контрольных работ по курсу «Математика»	2
Вопросы к экзамену по дисциплине "Математика" (1 курс, 2 семестр)	3
Раздел 1. Интегрирование функции одной переменной	5
Раздел 2. Дифференциальные уравнения	25
Раздел 3. Кратные интегралы.....	35

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ И СДАЧИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА»

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с **суммой двух последних цифр** номера студенческого билета или зачетной книжки (если **сумма двух последних цифр** — 0, то номер выполняемого варианта — 19).

Для каждой задачи:

- полностью привести ее условие;
- привести содержательное решение;
- явным образом записать ответ.

В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего варианта.

Чистовой вариант работы выполняют в одном экземпляре, на белой бумаге форматом стандартного писчего листа (формат А-4, 210 x 297 мм).

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "МАТЕМАТИКА" (1 КУРС, 2 СЕМЕСТР)

1. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
2. Интегрирование путем замены переменной. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование простейших дробей.
4. Интегрирование дробно-рациональных функций.
5. Интегрирование иррациональных функций.
6. Интегрирование тригонометрических функций.
7. Понятие определенного интеграла.
8. Условие существования определенного интеграла.
9. Классы интегрируемых функций. Свойства интегрируемых функций.
10. Свойства определенных интегралов.
11. Теорема о среднем значении.
12. Определенный интеграл как функция переменного верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница.
13. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Численные методы интегрирования.
15. Геометрические приложения определенных интегралов.
16. Интеграл по бесконечному промежутку.
17. Интеграл от неограниченной функции.
18. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции многих переменных.
19. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
20. Использование дифференциала в приближенных вычислениях. Касательная плоскость.
21. Производные и дифференциалы высших порядков функций многих переменных.
22. Производные от сложных функций многих переменных.
23. Производная по заданному направлению. Градиент.
24. Исследование функций многих переменных на экстремум.
25. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
26. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
27. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
28. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
29. Уравнения в полных дифференциалах.
30. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли.
31. Численные методы решения дифференциальных уравнений.
32. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши для дифференциального уравнения высших порядков. Краевая задача.
33. Дифференциальные уравнения высших порядков, разрешимые в квадратурах.
34. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения
35. Теорема о структуре множества всех решений линейного однородного уравнения.
36. Решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных.

- 37. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
- 38. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.
- 39. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами (со специальной правой частью).
- 40. Двойной интеграл: понятие и условие существования.
- 41. Свойства интегрируемых функций и двойных интегралов.
- 42. Вычисление двойного интеграла.
- 43. Тройной интеграл: понятие и условие существования.
- 44. Свойства интегрируемых функций и тройного интеграла.
- 45. Вычисление тройного интеграла.
- 46. Замена переменных в кратных интегралах.
- 47. Приложения кратных интегралов.

РАЗДЕЛ 1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Вариант № 1.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

1. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}.$
2. $\int x \cdot 3^{x/2} \, dx.$
3. $\int \frac{(3x - 1) \, dx}{\sqrt{2x^2 - 5x + 1}}.$
4. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 2}{x^3 - 2x^2} \, dx.$
5. $\int \frac{2x + 1}{x^3 - 1} \, dx.$
6. $\int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^3 \cdot \sqrt{x}}.$
7. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} \, dx.$
8. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx.$
9. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} \, dx.$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

10. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$
11. $\int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}.$

Вариант

№ 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

12. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 7, \\ y = -2x + 10. \end{cases}$
13. $\begin{cases} \rho = 4 \cos 3\varphi, \\ \rho = 2, (\rho \geq 2). \end{cases}$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$
 $0 \leq t \leq 2\pi$. Циклоида.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 0, \\ x = 2, \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: y = \sin x$,
 $0 \leq x \leq \pi$ вокруг оси Ox .

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^8}}.$$

$$2. \int x^2 e^{3x} dx.$$

$$3. \int \frac{(2x+5) dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}.$$

$$4. \int \frac{x^5 - x^4 + 3x - 2}{x^4 - x^3} dx.$$

$$5. \int \frac{3x dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}.$$

$$6. \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$7. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}.$$

$$8. \int \sin 5x \cdot \cos 7x dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}.$$

$$11. \int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2-4}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = x^2 + x - 5, \\ y = 2x + 7. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \rho = 1 + \sin 3\varphi, \\ \rho = 1, (\rho \geq 1). \end{cases}$$

$$14. \text{Вычислить длину дуги кривой } L: y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t \end{cases} \quad (\text{астроида}) \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

$$16. \text{Вычислить площадь поверхности вращения дуги } L: y^2 = 2x, \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

Вариант № 3.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x} dx}{1 + 4x^2}.$$

$$2. \int x^2 \sin 2x \, dx.$$

$$3. \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

$$4. \int \frac{x^3 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

$$5. \int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$$

$$6. \int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\left(1 + \sqrt{x+2}\right) \left(\sqrt[6]{x+2}\right)^5} dx.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$$

$$8. \int \operatorname{tg}^4 \frac{2x}{3} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$11. \int_2^3 \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx.$$

Вариант№ 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4, \quad (y \geq 4). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = 2(1 + \cos \varphi)$ – кардиоида.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} y = 3 - x^2, \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: y = \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq 1$ вокруг оси Ox .

Вариант № 4.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

1. $\int \frac{\ln^3 x + 2}{x \ln x} dx.$
2. $\int \sqrt{x} \ln x \, dx.$
3. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}.$
4. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 3x - 2} dx.$
5. $\int \frac{7x - 15}{x^3 - 2x^2 + 5x} dx.$
6. $\int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{x \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x^5}} dx.$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}.$
8. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$
9. $\int \frac{dx}{2 \sin x - 3 \cos x}.$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

10. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{2x^2 + 6x + 5}.$
11. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

Вариант**№ 4**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

12. $\begin{cases} y = (x - 2)^3, \\ y = 4x - 8. \end{cases}$
13. $\begin{cases} \rho = 2 \sin 4\varphi, \\ \rho = 1, (\rho \geq 1). \end{cases}$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = \frac{3x}{2}, \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги

$$L: \begin{cases} x = 15 \cos^3 t, \\ y = 15 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{астроида}) \text{ вокруг оси } Ox.$$

Вариант № 5.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

1. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos^2 x + 2}}.$

2. $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \, dx.$

3. $\int \frac{x + 4}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5}} \, dx.$

4. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 12}{(x^2 + 4x + 4)(x - 1)} \, dx.$

5. $\int \frac{dx}{x^3 + 8}.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \left(\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} \right)}.$

7. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}.$

8. $\int \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2} \, dx.$

9. $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}.$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$

11. $\int_0^{\pi/4} \frac{x \, dx}{\sin x^2}.$

Вариант**№ 5**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

12. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \rho = 4 \sin 3\varphi, \\ \rho = 2, \quad (\rho \geq 2). \end{cases}$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: y^2 = x^3, \quad 0 \leq x \leq \frac{4}{3}.$

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$S: \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{циклоида}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \text{вокруг оси } Ox.$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \leq x \leq 3$ вокруг оси $Ox.$

Вычислить интегралы, воспользовавшись справочником по высшей математике или компьютерным математическим пакетом, например, MathCAD (задачи 17–18).

17. $\int \frac{dx}{1 - \sin ax}.$

18. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} \, dx.$

Вариант № 6.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot \arcsin x}}.$$

$$2. \int x \ln(x^2 + 1) dx.$$

$$3. \int \frac{4x+7}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$$

$$4. \int \frac{x^4 - 3x^3 + 9x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx.$$

$$5. \int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx.$$

$$6. \int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$7. \int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$8. \int \sin^5 x dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx.$$

$$11. \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx.$$

Вариант**№ 6**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 2 - x. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3, (y \geq 3). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = 6e^{12\varphi/5}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ – логарифмическая спираль.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} y = (2-x)\sqrt{x}, \\ y = 0 \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги

$$L: \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \text{ вокруг оси } Ox.$$

Вычислить интегралы, воспользовавшись справочником по высшей математике или компьютерным математическим пакетом, например, MathCAD (задачи 17–18).

$$17. \int \frac{dx}{1 + \cos ax}.$$

$$18. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Вариант № 7.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

1. $\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x} dx.$

2. $\int e^{-x} \sin 2x dx.$

3. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}} dx.$

4. $\int \frac{x^3 + x^2 - x + 2}{x^2(x - 1)} dx.$

5. $\int \frac{x - 2}{x^3 + 4x} dx.$

6. $\int \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt[3]{x^2}} dx.$

7. $\int \frac{dx}{(9 + x^2) \sqrt{9 + x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}.$

9. $\int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}.$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

10. $\int_0^{\infty} x \cos x dx.$

11. $\int_0^5 \frac{5 dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$

Вариант**№ 7**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

12. $\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3, \\ y = x^2 - 4x + 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \rho = 3 + 2 \cos \varphi, \\ \rho = 3 \ (\rho \geq 3). \end{cases}$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t \end{cases}$ – астроида.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$S: \begin{cases} y = \sin x, \\ y = \frac{2x}{\pi} \end{cases}$ вокруг оси Ox .

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: y = 2\sqrt{x}$, $3 \leq x \leq 8$ вокруг оси Ox .

Вариант № 8.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

1. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt[3]{3 + 2 \cos x}}.$

2. $\int x \ln^2 x \, dx.$

3. $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{1 - x - x^2}} \, dx.$

4. $\int \frac{2x^4 + 8x^3 + x^2 + x - 20}{x^3(x + 5)} \, dx.$

5. $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}.$

6. $\int \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt[4]{x^3}} \, dx.$

7. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{4 - x^2}}.$

8. $\int \cos 4x \cdot \cos 7x \, dx.$

9. $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 1}.$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

10. $\int_1^{\infty} \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1}.$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

Вариант**№ 8**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

12. $\begin{cases} y = -x^2 + x + 3, \\ y = -x. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \rho = 6 \sin 3\varphi, \\ \rho = 3, \quad (\rho \geq 3). \end{cases}$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$S: \begin{cases} y = 2^x, \\ y = x + 1 \end{cases}$ вокруг оси $Ox.$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги

$L: \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ (циклоида), $0 \leq t \leq 2\pi,$ вокруг оси $Ox.$

Вариант № 9.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 4}}.$$

$$2. \int (x^2 + 1) 3^x dx.$$

$$3. \int \frac{x + 3}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} dx.$$

$$4. \int \frac{x^3 - 2x^2 - 12x - 7}{x^3 - 3x - 2} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^3 - 8}.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} (\sqrt{x} + 1)}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^4 3x}.$$

$$9. \int \frac{dx}{4 - \cos^2 x + 5 \sin^2 x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_1^{\infty} \frac{x^5 dx}{x^6 + 1}.$$

$$11. \int_{1/2}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Вариант**№ 9**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1, \\ y = 5x - 11. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3}, (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$ – спираль Архимеда.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры $S: y = xe^{-2x}$ вокруг оси Ox .

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ вокруг оси Ox .

Вариант № 10.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{\sin 2x}{3 \sin^2 x + 4} dx.$$

$$2. \int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx.$$

$$3. \int \frac{3x - 9}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx.$$

$$4. \int \frac{x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 5x + 2}{x^2(x + 1)} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x})}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x^4} dx.$$

$$8. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$11. \int_1^5 \frac{dx}{x \ln x}.$$

Вариант№ 10

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = x^2 - 7x + 3, \\ y = -2x - 1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3, (y \geq 3). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = 2e^{2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ – логарифмическая спираль.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} (y - 1)^2 = x, \\ x = 1 \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги

$$L: \begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t \end{cases} \text{ (астроида) вокруг оси } Ox.$$

Вариант № 11.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

1. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}.$
2. $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx.$
3. $\int \frac{x + 5}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} dx.$
4. $\int \frac{2x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} dx.$
5. $\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} dx.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})}.$
7. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}}.$
8. $\int \operatorname{ctg}^3 5x dx.$
9. $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

10. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x + 1)^3}.$
11. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

Вариант**№ 11**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 7, \\ y = x + 13. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \rho = 2 \cos 4\varphi, \\ \rho = 1, (\rho \geq 1). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1.$

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} y = 1 - x^2, \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ вокруг оси } Oy.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги

$$L: \begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t(t^2 - 3)}{3}, \end{cases} 0 \leq t \leq \sqrt{3} \text{ вокруг оси } Ox.$$

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx.$$

$$2. \int x^2 \ln x dx.$$

$$3. \int \frac{x-3}{\sqrt{3+66x-11x^2}} dx.$$

$$4. \int \frac{x^4+2x^3+x^2-2x+1}{x^3+x^2-x-1} dx.$$

$$5. \int \frac{3x^2+11x+8}{(x+2)(x^2+2x+2)} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx.$$

$$8. \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$11. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = -x^2 + 3x + 7, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \rho = 6 \cos 3\varphi, \\ \rho = 3, (\rho \geq 3). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$ – циклоида.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры $S: \begin{cases} x^2 - y^2 = 4, \\ y = \pm 2 \end{cases}$ вокруг оси Oy .

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: \begin{cases} x = 6 \sin t, \\ y = 6 \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ вокруг оси Oy .

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$$

$$2. \int \frac{x \, dx}{\sin^2 x}.$$

$$3. \int \frac{2x - 8}{\sqrt{1 - x - x^2}} \, dx.$$

$$4. \int \frac{x^4 - 2x^3 + 2x}{x^3 - x^2 - x + 1} \, dx.$$

$$5. \int \frac{x^2 - 8x + 13}{(x - 1)(x^2 - 4x + 5)} \, dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x^2})}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x^4} \, dx.$$

$$8. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx.$$

$$11. \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = 3x^2 + x - 4, \\ y = 7x + 5. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3, (y \geq 3). \end{cases}$$

$$14. \text{Вычислить длину дуги кривой } L : \begin{cases} x = 2 \sin^3 t, \\ y = 2 \cos^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad - \text{ астроида.}$$

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S : \begin{cases} (y - 3)^2 + 3x = 0, \\ x = -3 \end{cases} \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

$$16. \text{Вычислить площадь поверхности вращения дуги } L : y = e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty \quad \text{вокруг оси } Ox.$$

Вариант № 14.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

$$2. \int x \ln x \, dx.$$

$$3. \int \frac{3x + 5}{\sqrt{x(2x - 1)}} dx.$$

$$4. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 16x + 2}{(x^2 - 6x + 9)(x + 1)} dx.$$

$$5. \int \frac{4x^2 + 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)} dx.$$

$$6. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$8. \int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \, dx.$$

$$9. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_1^{\infty} x \sin x \, dx.$$

$$11. \int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}.$$

Вариант№ 14

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = x^2 + 5x - 2, \\ y = 4x. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9, (y \geq 9). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = \frac{5}{\varphi}, \frac{5}{12} \leq \varphi \leq \frac{12}{5}$ – гиперболическая спираль.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} y = xe^x, \\ y = 0, \\ x = 1 \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги

$$L: \begin{cases} x = 6(1 - \cos t), \\ y = 6(t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi \text{ вокруг оси } Oy.$$

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5+x^6}}.$$

$$2. \int \arcsin x \, dx.$$

$$3. \int \frac{x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}} \, dx.$$

$$4. \int \frac{2x^3+4x^2-8x+3}{x(x^2-2x+1)} \, dx.$$

$$5. \int \frac{x^2-8x+21}{(x-3)(x^2-8x+17)} \, dx.$$

$$6. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} \, dx.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{x^2+4}}.$$

$$8. \int \sec^4 x \cdot \operatorname{tg}^4 x \, dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{5+4 \sin x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x} \, dx.$$

$$11. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = -x^2 + 3x + 1, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4, (x \geq 4). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = 3(1 - \cos \varphi)$ – кардиоида.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} y = x^2, \\ y = 4 \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: y^2 = 4(x-4), 7 \leq x \leq 12$ вокруг оси Ox .

Вариант № 16.

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

1. $\int \frac{\cos x \cdot \sin 2x}{3 \cos^3 x + 2} dx.$

2. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}.$

4. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + x + 2}{(x^2 + x - 2)(x + 2)} dx.$

5. $\int \frac{x - 4x^2 - 10}{(x^2 - x)(x^2 + 2x + 10)} dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x + \sqrt[8]{x^7}} dx.$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx.$

8. $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx.$

9. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx.$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

10. $\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$

11. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}.$

Вариант**№ 16**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

12. $\begin{cases} y = 3x^2 - x + 2, \\ y = -4x + 8. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4, (y \geq 4). \end{cases}$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = e^{\varphi/\pi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ – логарифмическая спираль.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$S: \begin{cases} x = 3(1 - \cos t), \\ y = 3(t - \sin t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ (циклоида) вокруг оси Oy .

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: 4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси Oy .

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$2. \int x \ln(x-1) dx.$$

$$3. \int \frac{x dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

$$4. \int \frac{2x^4+9x^3+4x^2-6x-8}{x^3+4x^2} dx.$$

$$5. \int \frac{2-x^3+2x^2+3x}{(x^2+x)(x^2+1)} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt{x}}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx.$$

$$8. \int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) dx.$$

$$9. \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_1^{\infty} \frac{x dx}{(x+1)^2}.$$

$$11. \int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = 2x^2 - 7x + 5, \\ y = -13x + 7. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3}, (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = \frac{1}{\varphi}, \frac{3}{4} \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$ – гиперболическая спираль.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: x^2 + y^2 = 16, 0 \leq x \leq 2$ вокруг оси Ox .

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$2. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

$$3. \int \frac{x+1}{\sqrt{15-4x-4x^2}} dx.$$

$$4. \int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

$$5. \int \frac{13x+26}{(x-2)(x^2+6x+10)} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx.$$

$$8. \int \operatorname{tg}^5 3x dx.$$

$$9. \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_{2/\pi}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx.$$

$$11. \int_0^1 \frac{dx}{(x-3)(x-1)}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = x^2 - 5x + 9, \\ y = -7x + 9. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2\sqrt{3}, (y \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$ – спираль Архимеда.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: y = \frac{x^3}{3}, -2 \leq x \leq 2$ вокруг оси Ox .

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int e^{3\sin^2 x} \sin 2x \, dx.$$

$$2. \int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} \, dx.$$

$$3. \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+2}} \, dx.$$

$$4. \int \frac{6x^4 - 13x^3 - 24x^2 + 47x - 10}{(x^2-4)(x-2)} \, dx.$$

$$5. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 8}{(x^2+x)(x^2+4)} \, dx.$$

$$6. \int \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{(\sqrt{x} + 4)\sqrt[4]{x^3}} \, dx.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}.$$

$$9. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$11. \int_{-\pi/6}^0 \frac{\cos x}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x}} \, dx.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = x^2 + 3x - 4, \\ y = 4x + 2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1, (x \geq 1). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = 4(1 - \cos \varphi)$ – кардиоида.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 + 2 \sin t \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: y^2 = 4 + x, -4 \leq x \leq 2$ вокруг оси Ox .

Найти неопределенный интеграл, ответ проверить дифференцированием (задачи 1–9).

$$1. \int \frac{1 - \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$3. \int \frac{x+7}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx.$$

$$4. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 22x - 20}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx.$$

$$5. \int \frac{2x^2 - 5x - 71}{(x-1)(x^2+10x+26)} dx.$$

$$6. \int \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5} (1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}.$$

$$8. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость (задачи 10–11).

$$10. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}.$$

$$11. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (задачи 12–13).

$$12. \begin{cases} y = x^2 - 7x + 2, \\ y = -5x + 10. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1, (y \geq 1). \end{cases}$$

14. Вычислить длину дуги кривой $L: \rho = \frac{1}{\varphi}, \frac{5}{12} \leq \varphi \leq \frac{12}{5}$ – гиперболическая спираль.

15. Вычислить объем тела вращения плоской фигуры

$$S: \begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ вокруг оси } Oy.$$

16. Вычислить площадь поверхности вращения дуги $L: y^2 = 4x, 0 \leq x \leq 3$ вокруг оси Ox .

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант № 1

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $x^2 y' = y^2 + 4xy + 2x^2$; $y(1) = 1$.

2. $xy' + y = x \sin x$; $y(\pi/2) = 0$.

3. $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2$; $y(0) = 1$.

4. $e^{xy}(1 + xy)(y dx + x dy) + \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = 0$.

5. $y'' + \frac{2xy'}{1 + x^2} = \frac{6x^2}{1 + x^2}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

6. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$.

7. $y''' - y'' = 12x + 10$.

8. $y'' - y' - 2y = e^{-x}(12x + 2)$; $(x, y, y') = (0, 1, -2)$.

9. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

Вариант № 2

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $xy' = \frac{2x^2y + 3y^3}{x^2 + 3y^2}$; $y(1) = 1$.

2. $xy' + y = xe^x$; $y(1) = 0$.

3. $xy' + y = y^2 \ln x$; $y(1) = -1$.

4. $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0$.

5. $2yy'' - y'^2 - y^2 = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$.

6. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

7. $y'' - 4y = 8x^3$.

8. $2y'' - 6y' - 8y = e^{-x}(10x + 1)$; $(x, y, y') = (0, 4, -2)$.

9. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$.

Вариант № 3

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$; $y(1) = 0$.

2. $y' + 2xy = 4x^3e^{-x^2}$; $y(0) = 1$.

3. $xy' - y = -\frac{x^4}{y}$; $y(1) = 1$.

4. $(3x^2y + 2y) dx + (x^3 + 2x) dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$.

5. $y'' - \frac{2xy'}{1+x^2} = 1 + x^2$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$.

6. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$.

7. $y'' + 3y' = 6(9x + 7)$.

8. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(8x + 6)$; $(x, y, y') = (0, 0, 2)$.

9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$.

Вариант № 4

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$; $y(1) = \sqrt[3]{3}$.

2. $xy' - y = 2x^2\sqrt{1-x^2}$; $y(1) = 0$.

3. $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)y^2e^{-4x}$; $y(0) = 1$.

4. $\left[\frac{x}{y^2} + \cos(x+y) \right] dx + \left[\cos(x+y) - \frac{x^2}{y^3} \right] dy = 0$.

5. $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x} \right)$; $y(1) = 0$; $y'(1) = e$.

6. $y'' + y = 2 \operatorname{tg} x$.

7. $y''' + y'' - 2y' = 12x^2 - 4$.

8. $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}(12x - 7)$; $(x, y, y') = (0, 0, 0)$.

9. $y'' + 2y' + 5y = -2x \sin x$.

Вариант № 5

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $(x^2 - 2y^2) dx + 2xy dy = 0$; $y(1) = 1$.

2. $y' \sin x - y \cos x = x \cos x \cdot \sin^2 x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. $xy' - y = y^2(\ln x + 2) \ln x$; $y(1) = 1$.

4. $(3x^2 e^y + y \cos x) dx + (x^3 e^y + \sin x) dy = 0$.

5. $xy'' + y' = \ln x + 1$; $y(1) = -1$; $y'(1) = 1$.

6. $y'' + y' = \frac{1}{e^x + 1}$.

7. $y''' + 5y'' + 6y' = 108(x - 1)^2$.

8. $y'' - 4y = e^{-2x}$; $(x, y, y') = (0, 0, 0)$.

9. $y'' + y' = x \sin x$.

Вариант № 6

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $(\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0$; $y(4) = 1$.

2. $y' \cos x + y \sin x = \cos^2 x \cdot \operatorname{arctg} x$; $y(0) = 0$.

3. $3xy' + 3y = xy^2 \ln x$; $y(1) = 3$.

4. $\left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0$.

5. $(1 + y^2) y'' - 2yy'^2 = y(1 + y^2)^3$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

6. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x\sqrt{1-x^2}}$.

7. $y^{(6)} - 3y^{(4)} - 4y'' = 80x^3 + 120x - 160$.

8. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$; $(x, y, y') = (0, 2, 3)$.

9. $y'' + 2y' + y = e^x \sin x$.

Вариант № 7

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $y^2 y' = y^2 + xy - x^2$; $y(0) = 1$.

2. $xy' + y = \sin x$; $y(2\pi) = 0$.

3. $2y' + y \cos x = \frac{\cos x \cdot (1 + \sin x)}{y}$; $y(0) = -1$.

4. $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right) dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right) dy = 0$.

5. $y'' + y' \operatorname{tg} x = -\sin 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

6. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

7. $y^{(5)} + 8y''' - 9y' = 45x^4 + 60x^2 - 630$.

8. $y'' - y = 9xe^x$; $(x, y, y') = (0, 1, 0)$.

9. $y'' - 4y' + 13y = e^{3x} (24 \cos 2x + 10 \sin 2x)$.

Вариант № 8

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$; $y(1) = e$.

2. $xy' - y = -\frac{x^2 \sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

3. $3y' + 2xy = \frac{6xe^{-2x^2}}{y^2}$; $y(0) = -1$.

4. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) dy = 0$.

5. $y'' - y' \operatorname{ctg} x + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

6. $y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x}$.

7. $y''' + 3y'' + 2y' = 12x^2 - 12$.

8. $y'' + 3y' + 2y = e^{3x} (20x - 11)$; $(x, y, y') = (0, 0, 0)$.

9. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x} (-21 \cos 3x + 57 \sin 3x)$.

Вариант № 9

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$; $y(1) = 1$.
2. $4xy' + 2y = 49x^3 \ln x$; $y(1) = 0$.
3. $2xy' + 3y = (5x^2 + 3)y^2$; $y(1) = 1$.
4. $\left[\frac{3y^2}{x^4} + \cos(x + y^2) \right] dx + \left[2y \cos(x + y^2) - \frac{2y}{x^3} \right] dy = 0$.
5. $y'' = \frac{y'^2}{x^2} - 2\frac{y'}{x} + 2$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 0$.
6. $y'' + y = 2 \operatorname{tg}^2 x$.
7. $y^{(4)} - y''' = 60(x + 2)^2$.
8. $y'' + 4y' + 4y = 16xe^{2x}$; $(x, y, y') = \left(0, -\frac{1}{4}, 0\right)$.
9. $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}(148 \cos 3x - 61 \sin 3x)$.

Вариант № 10

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $x dx = (\sqrt{x^2 + y^2} - y) dy$; $y(1) = 0$.
2. $xy' + y = x \cos x$; $y(2\pi) = 0$.
3. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$; $y(1) = 1$.
4. $\left(\frac{y}{x^2} + xe^{y^2} \right) dx + \left(x^2 ye^{y^2} - \frac{1}{x} \right) dy = 0$.
5. $yy'' - y'^2 = 1$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.
6. $y'' + 4y' + 4y = \frac{2e^{-2x}}{x^3}$.
7. $y^{(5)} + 2y''' + y' = 6x^2 + 6x - 6$.
8. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $(x, y, y') = (0, 2, 2)$.
9. $y'' + 4y' + 13y = (44x + 26) \cos 3x - (12x + 40) \sin 3x$.

Вариант № 11

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $(x^2 + y^2) dy - 2xy dx = 0; \quad y(2) = 1.$

2. $x^2 y' - (2x + 1)y = x; \quad y(1) = 0.$

3. $3(xy' + y) = x^2 y^2; \quad y(1) = 3.$

4. $e^{xy}[y(x + y) + 1] dx + e^{xy}[x(x + y) + 1] dy + \operatorname{tg}^2 x dx = 0.$

5. $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + (x + 2) = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$

6. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$

7. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x - 6.$

8. $y'' - 4y' - 5y = xe^{5x}; \quad (x, y, y') = \left(0, -1, -\frac{1}{36}\right).$

9. $y'' + y' - 6y = (-76x + 14) \cos 4x - (82x + 77) \sin 4x.$

Вариант № 12

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $(x^2 + 2xy) dy - 2y^2 dx = 0; \quad y(2) = 1.$

2. $xy' + y = \cos x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

3. $y' - y = 2xy^2; \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

4. $\left(e^y + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}\right) dx + \left(xe^y - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y}\right) dy = 0.$

5. $yy'' - y'^2 = yy'; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$

6. $y'' - 6y' + 9y = \frac{2e^{3x}}{1 - x^2}.$

7. $y^{(4)} + y''' = 24x + 12.$

8. $y'' + 2y' - 3y = e^x; \quad (x, y, y') = (0, 0, 2).$

9. $y'' + 6y' + 9y = (38x - 23) \cos 2x + (-4x + 37) \sin 2x.$

Вариант № 13

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

$$1. \left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dx = 0; \quad y(1) = 0.$$

$$2. xy' - y = x^3 \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$3. 2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3; \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$4. \left(3x^2 \operatorname{tg} y + 3xy\sqrt{x^2 - 1}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + (x^2 - 1)^{3/2}\right) dy = 0.$$

$$5. 2y'^2 = (y - 1)y''; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

$$6. y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{x - 1}.$$

$$7. y^{(4)} - y''' - y'' + y' = 2x.$$

$$8. y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}(x + 1); \quad (x, y, y') = (0, 0, 2).$$

$$9. y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(12 \cos 2x - 8 \sin 2x).$$

Вариант № 14

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

$$1. (\sqrt{xy} - y) dx + x dy = 0; \quad y(1) = \frac{1}{4}.$$

$$2. y' \sin x - y \cos x = x \sin^3 x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$3. y' + 2xy = 2xy^3; \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

$$4. \left(x + 2x \ln x - 2x \ln y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y} - 1\right) dy = 0$$

$$5. y'' + \frac{2x}{1 + x^2} y' = \frac{6x^4 + 10x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$6. y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{e^{2x} + 1}.$$

$$7. y^{(4)} - 2y''' + y'' = 2x^2 - 2x.$$

$$8. 3y'' - 4y' + y = x^2 e^x; \quad (x, y, y') = \left(0, 4, \frac{9}{4}\right).$$

$$9. y'' - y' - 6y = e^{3x}(10 \cos 2x - 62 \sin 2x).$$

Вариант № 15

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

$$1. \quad 3y^2 dx = (x^2 + 3xy + y^2) dy; \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.$$

$$2. \quad y' + 2xy = e^{-x^2} \arcsin x; \quad y(0) = 0.$$

$$3. \quad y' \sin x - y \cos x = y^3; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$4. \quad \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2} + \frac{dx}{e^x - 1} = 0.$$

$$5. \quad y'' + \frac{y'}{x} + y'^2 = 0; \quad y(1) = 0; \quad y'(1) = 1.$$

$$6. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

$$7. \quad y^{(5)} - y^{(4)} = 120(2x + 3).$$

$$8. \quad y'' + y' = xe^{-x}; \quad (x, y, y') = (0, 2, 1).$$

$$9. \quad y'' - 8y' + 16y = e^{3x}(-22 \cos 4x + 31 \sin 4x).$$

Вариант № 16

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

$$1. \quad y dx = \frac{2xy^2 + 3x^3}{y^2 + 3x^2} dy; \quad y(1) = 1.$$

$$2. \quad xy' - y = 2x^3 \operatorname{tg}^2 x; \quad y(2\pi) = 0.$$

$$3. \quad xy' + y = xy^2; \quad y(1) = 1.$$

$$4. \quad \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) dy + \left(\sqrt{y} + \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx = 0.$$

$$5. \quad xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}; \quad y(1) = \frac{\pi}{2} - 1; \quad y'(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$6. \quad y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x.$$

$$7. \quad y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 1500x^2.$$

$$8. \quad y'' + 6y' + 9y = e^{2x}(25x^2 - 55x + 72); \quad (x, y, y') = (0, 5, 1).$$

$$9. \quad y'' - 4y' + 20y = e^{3x}(36 \cos 3x - 2 \sin 3x).$$

Вариант № 17

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$; $y(1) = 2$.
2. $2xy' + y = 18x^2\sqrt{x}\ln x$; $y(1) = 0$.
3. $y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x$; $y(0) = 1$.
4. $[y \cos x - \sin(x - y)] dx + [\sin x + \sin(x - y)] dy = 0$.
5. $xy'' - 2y' = 18x^2 \ln x$; $y(1) = y'(1) = 1$.
6. $y'' + 12y' + 36y = \frac{12e^{-6x}}{x^5}$.
7. $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = 48(x^2 - x)$.
8. $y'' - 4y' + 13y = e^{3x}(20x^2 + 38x - 10)$; $(x, y, y') = (0, -2, 0)$.
9. $y'' - 6y' + 8y = (-39x - 97) \cos 3x + (52x - 17) \sin 3x$.

Вариант № 18

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

1. $(y^2 - 2x^2) dy + 2xy dx = 0$; $y(1) = 1$.
2. $(1 + x^2) y' + xy = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2(1 + \sqrt{x})}$; $y(0) = 1$.
3. $y' + xy - x^3y^3 = 0$; $y(0) = -1$.
4. $\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$.
5. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$; $y(-1) = \frac{\pi}{6}$; $y'(-1) = \frac{1}{2}$.
6. $y'' - 12y' + 36y = \frac{2xe^{6x}}{x^2 + 2}$.
7. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 3x^2 - 2$.
8. $y'' + y' - 6y = e^{-3x}(-30x^2 - 18x + 21)$; $(x, y, y') = (0, 0, 2)$.
9. $y'' + 8y' + 16y = (86x + 21) \cos 3x - (27x + 122) \sin 3x$.

Вариант № 19

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

$$1. \quad xy + y^2 = (2x^2 + xy) y'; \quad y(1) = 1.$$

$$2. \quad (1 + x^2) y' - (1 + x) y = -\sqrt{x^2 + 1}; \quad y(0) = 0$$

$$3. \quad 2y' - 3y \cos x = -\frac{e^{-2x} (2 + 3 \cos x)}{y}; \quad y(0) = 1.$$

$$4. \quad \left(\frac{y}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} + \operatorname{ctg} y \right) dx - \left(\frac{x}{\sin^2 y} + \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} - \operatorname{tg} x \right) dy = 0.$$

$$5. \quad 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

$$6. \quad y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{x^2 + 1}.$$

$$7. \quad y^{(4)} + y''' = 24x.$$

$$8. \quad y'' - 8y' + 16y = e^{3x} (x^2 - 2x + 1); \quad (x, y, y') = (0, 4, 8).$$

$$9. \quad y'' - 8y' + 20y = (32x - 52) \cos 2x + (64x + 76) \sin 2x.$$

Вариант № 20

Найти общие решения дифференциальных уравнений и частные решения, если заданы начальные условия.

$$1. \quad x^2 y dx = (x^3 + y^3) dy; \quad y(\sqrt[3]{3}) = 1.$$

$$2. \quad (x^2 + 1) y' + xy = (x^2 + 1)^{3/2}; \quad y(0) = 0.$$

$$3. \quad xy' + 2y = x^5 y^2; \quad y(1) = 1.$$

$$4. \quad x \sin(x + y) (dx + dy) + \cos(x + y) dy = 0.$$

$$5. \quad xy'' - y' + x^3 \sin x = 0; \quad y(\pi) = -3\pi; \quad y'(\pi) = -\pi^2.$$

$$6. \quad y'' + 10y' + 25y = \frac{6e^{-5x}}{x^4}.$$

$$7. \quad y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 54x - 18.$$

$$8. \quad y'' - 6y' + 13y = e^{2x} (15x^2 - 2x - 18); \quad (x, y, y') = (0, 0, 10).$$

$$9. \quad y'' + 2y' - 8y = e^{4x} (95 \cos 3x - 136 \sin 3x).$$

РАЗДЕЛ 3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Условия задач

1. Вычислить интеграл по области D , ограниченной указанными линиями.
2. Вычислить интеграл по области D , заданной системой неравенств:
 - изобразить область в декартовой системе координат;
 - вычислить интеграл, переходя к полярным координатам.
3. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.
4. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.
5. Найти объем тела, заданного неравенствами.

ВАРИАНТ 1

1.
$$\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) \, dx \, dy$$
$$D : x = 1; y = x^2; y = -\sqrt{x}$$
2.
$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{3} \cdot x; \\ 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \end{cases}$$
3.
$$x^2 + y^2 = 18; y = \sqrt{3}x;$$
$$z = \frac{25}{11}x; y = 0; z = 0$$
4.
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{255}}$$
5.
$$16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100; y \leq 0;$$
$$0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}}; y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$$

ВАРИАНТ 2

1.
$$\iint_D y^2 \cdot \sin \frac{xy}{2} \, dx \, dy$$
$$D : x = 0; y = \sqrt{\pi}; y = \frac{x}{2}$$
2.
$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq x; \\ x^2 + y^2 \leq y \end{cases}$$
3.
$$y = 2\sqrt{x}; x + y = 3;$$
$$z = 3x; z = 0$$
4.
$$z = \frac{15}{2}\sqrt{x^2 + y^2}; z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2$$
5.
$$25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100; y \geq 0;$$
$$z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}; y \geq -x\sqrt{3}$$

ВАРИАНТ 3

1.
$$\iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3) \, dx \, dy$$
$$D : x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3$$

2.
$$\iint_D \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{y}{x}} \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} x \leq y \leq \sqrt{3} \cdot x; \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

3.
$$y = \sqrt{3x}; x + y = 6;$$
$$z = 4y; z = 0$$

4.
$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}$$

5.
$$16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81; y \leq 0;$$
$$z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}; y \leq -x\sqrt{3}$$

ВАРИАНТ 4

1.
$$\iint_D y^2 \cdot e^{-\frac{xy}{4}} \, dx \, dy$$
$$D : x = 0; y = 2; y = x$$

2.
$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} y \geq x; y \geq -x; \\ x^2 + y^2 \leq 2y \end{cases}$$

3.
$$y = \sqrt{3x}; x^2 + y^2 = 18;$$
$$y = 0; z = \frac{5}{11}x; z = 0$$

4.
$$z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}; z = 1;$$
$$x^2 + y^2 = 60 \text{ (внутри цилиндра)}$$

5.
$$64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144;$$
$$z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}; 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$$

ВАРИАНТ 5

$$1. \quad \iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3) \, dx \, dy$$

$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^2$$

$$2. \quad \iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \, dx \, dy$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}; \\ 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x + y &= 3; y^2 = 4x; \\ z &= -y; z = 0 \quad (z \geq 0) \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} z &= \frac{21}{2} \sqrt{x^2 + y^2}; \\ z &= \frac{23}{2} - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} 64 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 196; \\ z &\leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}; \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 0 \end{aligned}$$

ВАРИАНТ 6

$$1. \quad \iint_D y^2 \cdot \cos \frac{xy}{2} \, dx \, dy$$

$$D: x = 0; y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; y = \frac{x}{2}$$

$$2. \quad \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

$$D: \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0; \\ x^2 + y^2 \leq x + y \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x &= 3\sqrt{3y}; x = 2\sqrt{3y}; \\ z &= 0; z + y = 3 \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} z &= 3\sqrt{x^2 + y^2}; \\ z &= 10 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} 64 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 196; \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} &\leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \end{aligned}$$

ВАРИАНТ 7

1.
$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) \, dx \, dy$$
$$D : x = 1; y = x^3; y = -\sqrt[3]{x}$$

2.
$$\iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq x\sqrt{3}; \\ x^2 + y^2 \leq 4x \end{cases}$$

3.
$$y = \sqrt{5x}; x^2 + y^2 = 50$$
$$z = \frac{12}{25}x; z = 0 \quad (z \geq 0)$$

4.
$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{80}}$$

5.
$$16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100;$$
$$-\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}}$$

ВАРИАНТ 8

1.
$$\iint_D 4y^2 \cdot \sin xy \, dx \, dy$$
$$D : x = 0; y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; y = x$$

2.
$$\iint_D \frac{1}{(4 + x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0; \\ 2y \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

3.
$$x = 19\sqrt{2y}; x = 4\sqrt{2y};$$
$$z = 0; y + z = 2$$

4.
$$z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}; z = 6;$$
$$x^2 + y^2 = 51 \text{ (внутри цилиндра)}$$

5.
$$9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81; y \leq 0;$$
$$0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}}; y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$$

ВАРИАНТ 9

$$1. \quad \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) \, dx \, dy$$

$$D: x = 1; y = x^2; y = -\sqrt[3]{x}$$

$$2. \quad \iint_D \frac{y}{x^2} \, dx \, dy$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq x; \\ 16 \leq x^2 + y^2 \leq 4\sqrt{2} \cdot x \end{cases}$$

$$3. \quad x = \frac{5}{3}\sqrt{y}; \quad x = \frac{5}{9}y;$$

$$z = 0; \quad z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{y})$$

$$4. \quad z = \sqrt{36 - x^2 - y^2};$$

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}$$

$$5. \quad 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 169; \quad y \geq 0;$$

$$-\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0; \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$$

ВАРИАНТ 10

$$1. \quad \iint_D y^2 \cdot e^{-\frac{xy}{8}} \, dx \, dy$$

$$D: x = 0; y = 2; y = \frac{x}{2}$$

$$2. \quad \iint_D \frac{1}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq x\sqrt{3}; \\ x^2 + y^2 \leq \sqrt{3} \cdot y \end{cases}$$

$$3. \quad x = \sqrt{2y}; \quad x + y = 4;$$

$$z = 0; \quad z = \frac{3}{5}x$$

$$4. \quad z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}; \quad z = 5;$$

$$x^2 + y^2 = 45 \text{ (внутри цилиндра)}$$

$$5. \quad 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64; \quad y \leq \frac{x}{\sqrt{3}};$$

$$z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}; \quad y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$$

ВАРИАНТ 11

$$1. \quad \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) \, dx \, dy$$

$$D : x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^2$$

$$2. \quad \iint_D \frac{1}{(4 - x^2 - y^2)^2} \, dx \, dy$$

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2y; \\ x^2 + y^2 \leq 2x \end{cases}$$

$$3. \quad x = \sqrt{3y}; x + y = 6;$$

$$z = 0; z = \frac{4}{5}x$$

$$4. \quad z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}; z = 7;$$

$$x^2 + y^2 = 51 \text{ (внутри цилиндра)}$$

$$5. \quad 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100;$$

$$z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}; -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}$$

ВАРИАНТ 12

$$1. \quad \iint_D y^2 \cdot \cos xy \, dx \, dy$$

$$D : x = 0; y = \sqrt{\pi}; y = x$$

$$2. \quad \iint_D \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy$$

$$D : 2 \leq x^2 + y^2 \leq -2y$$

$$3. \quad y = \frac{5}{6}\sqrt{x}; y = \frac{5}{18}x;$$

$$z = 0; z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x})$$

$$4. \quad z = 6\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$z = 16 - x^2 - y^2$$

$$5. \quad 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144;$$

$$z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}; x\sqrt{3} \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$$

ВАРИАНТ 13

1.
$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) \, dx \, dy$$
$$D : x = 1; y = x^3; y = -\sqrt{x}$$

2.
$$\iint_D \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4y; \\ y \geq 2 \end{cases}$$

3.
$$y = 6\sqrt{3x}; y = \sqrt{3x};$$
$$z = 0; x + z = 3$$

4.
$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2};$$
$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}}$$

5.
$$36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144;$$
$$-\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}}$$

ВАРИАНТ 14

1.
$$\iint_D 4y^2 \cdot \sin 2xy \, dx \, dy$$
$$D : x = 0; y = \sqrt{2\pi}; y = 2x$$

2.
$$\iint_D \frac{x^2}{y^3} \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \geq y; & y \geq x; \\ x^2 + y^2 \leq x + y \end{cases}$$

3.
$$y = 2\sqrt{x}; x + y = 3;$$
$$z = 0; z = 3y \quad (z \geq 0)$$

4.
$$z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}; z = 4;$$
$$x^2 + y^2 = 39 \text{ (внутри цилиндра)}$$

5.
$$9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81;$$
$$-\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}}$$

ВАРИАНТ 15

$$1. \quad \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) \, dx \, dy$$

$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^3$$

$$2. \quad \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2y; & x \leq 0; \\ x^2 + y^2 \geq -2x \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x + y &= 8; y^2 = 4x; \\ z &= 0; z = 6y \quad (z \geq 0) \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{16 - x^2 - y^2}; \\ z &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} 4 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64; y \leq x\sqrt{3}; \\ 0 &\leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}}; y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ВАРИАНТ 16

$$1. \quad \iint_D y^2 \cdot e^{-\frac{xy}{2}} \, dx \, dy$$

$$D: x = 0; y = \sqrt{2}; y = x$$

$$2. \quad \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$$

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x; \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{aligned} y &= \frac{5}{3}\sqrt{x}; y = \frac{5}{9}x; \\ z &= 0; z = \frac{5}{3}(3 + \sqrt{x}) \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} z &= \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2}; \\ z &= \frac{5}{2} - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} 36 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144; y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}; \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} &\leq z \leq 0; y \geq x\sqrt{3} \end{aligned}$$

ВАРИАНТ 17

1.
$$\iint_D (4xy + 3x^2y^2) \, dx \, dy$$
$$D : x = 1; y = x^2; y = -\sqrt{x}$$

2.
$$\iint_D \frac{1}{x+y} \, dx \, dy$$
$$D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq x + y$$

3.
$$x = \sqrt{3y}; z = \frac{4}{3}x;$$
$$z = 0; x + y = 6$$

4.
$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}; z = 2;$$
$$x^2 + y^2 = 27 \text{ (внутри цилиндра)}$$

5.
$$36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 121; y \geq 0;$$
$$z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}; y \geq x\sqrt{3}$$

ВАРИАНТ 18

1.
$$\iint_D y^2 \cdot \cos 2xy \, dx \, dy$$
$$D : x = 0; y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; y = \frac{x}{2}$$

2.
$$\iint_D \frac{y^3}{x^2} \, dx \, dy$$
$$D : \begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x; \\ -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x \end{cases}$$

3.
$$x = \sqrt{2y}; z = \frac{15}{8}y;$$
$$x^2 + y^2 = 8; x = 0; z = 0$$

4.
$$z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}; z = 3;$$
$$x^2 + y^2 = 33 \text{ (внутри цилиндра)}$$

5.
$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49; y \leq 0;$$
$$z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}; y \leq x\sqrt{3}$$

ВАРИАНТ 19

$$1. \quad \iint_D (12xy + 9x^2y^2) \, dx \, dy$$

$$D : x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^2$$

$$2. \quad \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4; \\ x^2 + y^2 + 4y \geq 0; \\ x \geq 0; y \leq 0 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{aligned} y &= \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; \\ z &= 0; z + y = 2 \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} z &= 12\sqrt{x^2 + y^2}; \\ z &= 28 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} 16 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64; y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}; \\ z &\geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}; y \leq -x\sqrt{3} \end{aligned}$$

ВАРИАНТ 20

$$1. \quad \iint_D 3y^2 \cdot \sin \frac{xy}{2} \, dx \, dy$$

$$D : x = 0; y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}; y = \frac{2}{3}x$$

$$2. \quad \iint_D \frac{x + y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y \geq 0; \\ x^2 + y^2 + 4y \leq 0; \\ 0 \leq x \leq -\frac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x &= \sqrt{y}; x = 2\sqrt{y}; \\ x + \frac{1}{3}z &= 2; z = 0 \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} z &= 9\sqrt{x^2 + y^2}; \\ z &= 22 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} 16 &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100; y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}; \\ z &\leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}; y \geq -x\sqrt{3} \end{aligned}$$