**ЛЕКЦИЯ № ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Транспортная задача является представителем класса задач линейного программирования и поэтому обладает всеми качествами линейных оптимизационных задач, но одновременно она имеет и ряд дополнительных полезных свойств, которые позволили разработать специальные методы ее решения. Транспортная задача является одной из наиболее распространенных специальных задач линейного программирования. Частные постановки задачи рассмотрены рядом специалистов по транспорту, например О. Н. Толстым. Первая строгая постановка транспортной задачи принадлежит Ф. Хичкоку, поэтому в зарубежной литературе ее называют проблемой Хичкока.

Первый точный метод решения Т-задачи разработан Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным. Под названием “транспортная задача” объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены симплексным методом. Однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

***12.1. Постановка задачи***

Под термином "транспортные задачи" понимается широкий круг задач не только транспортного характера. Общим для них является, как правило, распределение ресурсов, находящихся у *m* производителей (поставщиков), по *n* потребителям этих ресурсов. В качестве критериев в транспортных задачах используют: *критерий стоимости* (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию), *критерий времени* (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени) и другие.

Наиболее часто встречаются следующие задачи, относящиеся к транспортным:

        прикрепление потребителей ресурса к производителям;

        привязка пунктов отправления к пунктам назначения;

        взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направлений;

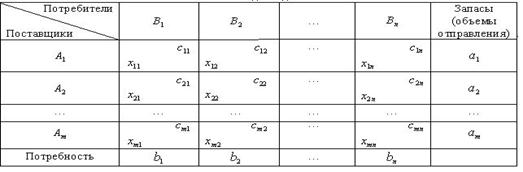
        отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования;

        оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами-изготовителями и др.

Рассмотрим экономико-математическую модель прикрепления пунктов отправления к пунктам назначения. Имеются *m* пунктов отправления груза и объемы отправления по каждому пункту *a*1, *a*2 ,...,*am* . Известна потребность в грузах *b*1, *b*2 ,...,*bn* по каждому из *n* пунктов назначения. Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту *cij* , http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image214.jpghttp://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image215.jpg. Необходимо рассчитать оптимальный план перевозок, т.е. определить, сколько груза должно быть отправлено из каждого *i*-го пункта отправления (от поставщика) в каждый *j*-ый пункт назначения (до потребителя) *xij* с минимальными транспортными издержками.

В общем виде исходные данные представлены в табл. 3.1. Строки транспортной таблицы соответствуют пунктам отправления (в последней клетке каждой строки указан объем запаса продукта *ai* ), а столбцы - пунктам назначения (последняя клетка каждого столбца содержит значение потребности *bj*). Все клетки таблицы (кроме тех, которые расположены в нижней строке и правом столбце) содержат информацию о перевозке из *i*-го пункта в *j*-й: в правом верхнем углу находится цена перевозки единицы продукта, а в левом нижнем - значение объема перевозимого груза для данных пунктов.

Таблица 3.1. Исходные данные



Транспортная задача называется закрытой, если суммарный объем отправляемых грузов http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image219.gif.равен суммарному объему потребности в этих грузах по пунктам назначения http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image221.gif:

http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image222.jpg (3.1)

Если такого равенства нет (потребности выше запасов или наоборот), запасу называют открытой, т.е.:

http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image223.jpg (3.2)

Для написания модели необходимо все условия (ограничения) и целевую функцию представить в виде математических уравнении.

Все грузы из *i*-х пунктов должны быть отправлены, т.е.:

http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image224.jpg,http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image214.jpg (3.3)

Все *j*-е пункты (потребители) должны быть обеспечены грузами в плановом объеме:

http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image225.jpg, http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image215.jpg (3.4)

Суммарные объемы отправления должны равняться суммарным объемам назначения (3.1). Должно выполняться условие неотрицательности переменных: http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image226.jpg, http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image214.jpg, http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image215.jpg. Перевозки необходимо осуществить с минимальными транспортными издержками (функция цели):

http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image227.jpg(3.5)

Вместо матрицы стоимостей перевозок (*cij* ) могут задаваться матрицы расстояний. В таком случае в качестве целевой функции рассматривается минимум суммарной транспортной работы. Как видно из выражения (3.1), уравнение баланса является обязательным условием решения транспортной задачи. Поэтому, когда в исходных условиях дана открытая задача, то ее необходимо привести к закрытой форме. В случае, если

       потребности по пунктам назначения превышают запасы пунктов отправления, то вводится фиктивный поставщик с недостающим объемом отправления;

       запасы поставщиков превышают потребности потребителей, то вводится фиктивный потребитель с необходимым объемом потребления.

Варианты, связывающие фиктивные пункты с реальными, имеют нулевые оценки. После введения фиктивных пунктов задача решается как закрытая.

Транспортным задачам присущи следующие особенности:

       распределению подлежат однородные ресурсы;

       условия задачи описываются только уравнениями;

       все переменные выражаются в одинаковых единицах измерения;

       во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице;

       каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

Транспортные задачи могут решаться симплекс-методом. Однако перечисленные особенности позволяют для транспортных задач применять более простые методы решения.

***Опорный план*** является допустимым решением транспортной задачи и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов. Существует три метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля. "Качество" опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только способом выбора клетки для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода.

***12.2. Методы составления начального опорного плана***

Базисный план составляется последова­тельно, в несколько шагов (точнее, *m* + *n* - 1 шагов). На каждом из этих шагов заполняется одна клетка, притом так, что, либо пол­ностью удовлетворяется один из заказчиков (тот, в столбце кото­рого находится заполняемая клетка), либо полностью вывозится весь запас груза с одной из баз (с той, в строке которой находится заполняемая клетка).

       В первом случае мы можем исключить столбец, содержащий заполненную на этом шаге клетку, и считать, что задача свелась к заполнению таблицы с числом столбцов, на единицу меньшим, чем было перед этим шагом, но с тем же количеством строк и с соот­ветственно измененным запасом груза на одной из баз (на той базе, которой был удовлетворен заказчик на данном шаге).

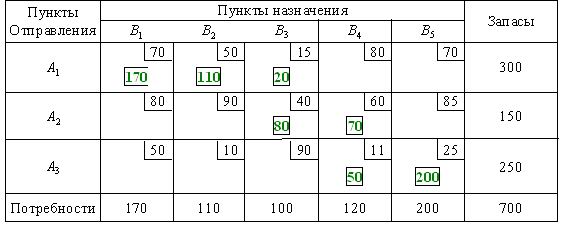
       Во втором случае исключается строка, содержащая заполняемую клетку, и счи­тается, что таблица сузилась на одну строку при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потреб­ности заказчика, в столбце которого находится заполняемая клетка.

Начиная с первоначально данной таблицы и повторив (*m* + *n* - 2) раз описанный шаг, мы придем к “таблице”, состоящей из одной строки и одного столбца (иначе говоря, из одной пустой клетки). Другими словами, мы пришли к задаче с одной базой и с одним потребителем, причем потребности этого единственного заказчика равны запасу груза на этой единственной базе. Заполнив последнюю клетку, мы освобождаем последнюю базу и удовлетворяем потреб­ность последнего заказчика. В результате, совершив (*m* + *n* - 1) шагов, мы и получим искомый опорный план.

***Замечание****.* Может случиться, что уже на некотором (но не на последнем!) шаге потребность очередного заказчика окажется рав­ной запасу груза на очередной базе. Тогда после заполнения оче­редной клетки объем таблицы как бы одновременно уменьшается на одни столбец и на одну строку. Но и при этом мы должны считать, что уменьшение объема таблицы происходит либо на один столбец, а на базе сохраняется "остаток" равный нулю, либо на одну строку, а у заказчика еще осталась неудовлетворенная "потребность" в количестве нуля единиц груза, которая и удовле­творяется на одном из следующих шагов. Этот нуль ("запас" или "потребностью" – безразлично) надо записать в очередную заполняе­мую клетку на одном из последующих шагов. Так как при этом оказывается равной нулю одна из базисных неизвестных, то мы имеем дело с вырожденным случаем.

**1. Диагональный метод**, или **метод северо-западного угла**. При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется левая верхняя клетка (северо-западный угол) остав­шейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начи­нается с клетки неизвестного *x*11 и заканчивается в клетке неизвест­ного *xmn* , т. е. идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

***Пример***



Заполнение таблицы начинается с ее северо-западного угла, т.е. клетки с неизвестным *x*11. Первая база *A*1  может полностью удовле­творить потребность первого заказчика *B*1 (*a*1=300, *b*1=170, *a*1 > *b*1). Полагая *x*11= 170*,* вписываем это значение в клетку *x*11 и исключаем из рассмотрения первый столбец. На базе *A*1 остается измененный запас http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image230.jpg. В оставшейся новой таблице с тремя строками *A*1*,A*2*,A*3 и четырьмя столбцами *B*1*,B*2*,B*3*,B*4; северо-западным углом будет клетка для неизвестного *x*12 . Первая база с запасом http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image231.jpgможет полностью удовлетворить потребность второго заказчика *B*2 http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image232.jpg. Полагаем *x*12 = 110, вписываем это значе­ние в клетку *x*12 и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе *A*1 остается новый остаток (запас) http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image233.jpg. В оставшейся новой таблице с тремя строками *A*1*,A*2*,A*3 и тремя столбцами *B*3*,B*4*,B*5  северо-западным углом будет клетка для неизвестного *x*13. Теперь третий заказчик *B*3 может принять весь запас с базы *A*1 *http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image234.jpg*. Полагаем *x*13 = 20, вписываем это значение в клетку *x*13  и исключаем из рассмотрения первую строку. У заказ­чика из *B*3 осталась еще не удовлетворенной потребность http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image235.jpg.

Теперь переходим к заполнению клетки для неизвестного *x*23 и т.д.

Через шесть шагов у нас останется одна база *A*3 с запасом груза (остатком от предыдущего шага) http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image236.jpgи один пункт *B*5 с потреб­ностью*b*5=200 . Соответственно этому имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, положив *x*35=200. План составлен. Базис образован неизвестными *x*11*,x*12*,x*13*,x*23*,x*24*,x*34*,x*35. Правиль­ность составленного плана легко проверить, подсчитав суммы чисел, стоящих в заполненных клетках по строкам и столбцам.

Общий объем перевозок в тонно-километрах для этого плана составит

http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image237.jpg

**2. Метод наименьшей стоимости**. При этом методе на каждом шаге построения опорного плана первою заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф. Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них.

***Пример***



В данном случае заполнение таблицы начинается с клетки для неизвест­ного *x*32, для которого мы имеем значение *c*32 = 10, наименьше из всех значений *cij* . Эта клетка находится на пересечении третьей строки и второго столбца, соответствующим третьей базе *A*3 и вто­рому заказчику *B*2. Третья база *A*3 может полностью удовлетворить потребность второго заказчика *B*2 (*a*3=250, *b*2=110, *a*3 > *b*2) . Пола­гая *x*32 = 110, вписываем это значение в клетку *x*32 и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе *A*3 остается изменённый запас http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image239.jpg. В оставшейся новой таблице с тремя строками *A*1*,A*2*,A*3 и четырьмя столбцами *B*1*,B*3*,B*4*,B*5  клеткой с наименьшим значе­нием *cij* клетка, где*c*34=11. Заполняем описанным выше способом эту клетку и аналогично заполняем следующие клетки. В резуль­тате оказываются заполненными (в приведенной последовательности) следующие клетки:

http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image240.jpg

На пятом шаге клеток с наименьшими значениями *cij* оказалось две (*c*11=*c*15=70). Мы заполнили клетку для *x*15 , положив *x*15 = 180. Можно было выбрать для заполнения другую клетку, положив *x*11 = 170, что приведет в результате к другому опорному плану. Общий объем перевозок в тонно-километрах для этого плана составит

http://floyd-sweet.on.ufanet.ru/1.files/image241.jpg

***Замечание****.* В диагональном методе не учитываются величины тарифов, в методе же наименьшей стоимости эти величины учитываются, и часто последний метод приводит к плану с меньшими общими затратами (что и имеет место в нашем примере), хотя это и не обязательно.

Кроме рассмотренных выше способов иногда используется, так называемый, метод Фогеля. Суть его состоит в следующем: В распределительной таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. Отмечается наибольшая разность. Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчет не принимаются. На каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится, как и ранее.