

Введение

Сопротивление материалов – практически первая учебная дисциплина общинженерной подготовки, с которой сталкивается студент. Это наука о прочности и жесткости элементов и деталей конструкций, которая ставит задачу разработать простые, удобные для практического применения методы расчетов типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Применение упрощающих гипотез позволяет с достаточной для инженерных целей точностью выполнять прочностной расчет изделий, доводя его до окончательного числового результата. Другими словами, наука «Сопротивление материалов» создает основы расчетов элементов конструкций на прочность.

Выводы, полученные в сопротивлении материалов, в дальнейшем используются во многих специальных технических дисциплинах. Без знания и применения этих выводов нельзя спроектировать и построить ни одного сооружения, отвечающего современным требованиям. Отсюда становится понятным значение сопротивления материалов как науки и ее место среди специальных технических дисциплин, в которых практические расчеты базируются на выводах сопротивления материалов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на изучение общетехнических дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности и надежности создаваемых и находящихся в эксплуатации изделий, важно иметь обеспечение студентов пособиями, небольшими по объему, но охватывающими необходимые разделы знаний в соответствии с задачами формирования у студентов необходимой подготовки по прочности и надежности конструкций.

Настоящее пособие предназначено преимущественно для студентов, обучающихся по безотрывной форме обучения для немеханических специальностей, включающей в себя курс сопротивления материалов по сокращенной программе или входящей в состав курса "Прикладная механика". Это пособие содержит основной материал по изучаемой дисциплине.

В основные разделы курса включены примеры, позволяющие от простейших задач переходить на более сложные параллельно с изучением теоретического материала. Приложением к изучаемому материалу предлагаются две контрольные работы с методическими указаниями по их выполнению. В зависимости от специальности преподаватель может варьировать объем контрольных заданий.

1. Основные положения

1.1. Общие определения и допущения

Учебная дисциплина “Сопротивление материалов” ставит основной задачей противопоставить действию внешних сил на тело материал нужного качества и в необходимом количестве. Следовательно, для обеспечения прочности изделия необходимо учитывать три основных фактора: внешние силы, материал и геометрию тела, т. е. его форму и размеры. Учитывая многообразие и сложность существования в реальности отмеченных факторов, в сопротивлении материалов реальная конструкция, материал и действующие силы упрощаются, классифицируются и на основании проведения упрощений от реальной конструкции переходят к анализу расчетной схемы. Рассмотрим последовательно эти упрощения.

Материал, используемый в конструкциях, считают идеально упругим, т. е. подчиняющимся при нагружении закону Гука. Принимается гипотеза о сплошности и однородности материала, т. е. об отсутствии пустот и разрывов, и о неизменности свойств по всему его объему. Материал предполагается изотропным, т. е. обладающим одинаковыми механическими свойствами по всем направлениям.

Действующие на тело внешние силы классифицируют по разным признакам: по области действия – сосредоточенные, т. е. действующие в точке, обозначают “ F ” и предполагают, что их действие сосредоточено в точке, а размерность H или кгс; распределенные по длине – q (Н/м или кгс/м); распределенные по площади “ s ” (Н/м² или кгс/м²); распределенные по объему “ k ” (Н/м³ или кгс/м³); по времени действия – постоянно действующие и статические, циклические и динамические (ударные). К сосредоточенным силам относятся нагрузки в виде пар сил (моментов сил) – “ M ” или “ T ” (Н·м).

Силы различают внешние и внутренние. Внешние – это силы, приложенные извне к рассматриваемому объекту. К внешним силам относятся и реакции. Внутренние – это силы сцепления частичек тела или его элементов внутри рассматриваемого объекта.

При оценке действия сил на упругое тело применяется принцип независимости действия сил, заключающийся в том, что результат действия системы сил на тело равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности независимо от очередности их приложения к телу.

И, наконец, размеры и форма тела, т. е. геометрия тела. В сопротивлении материалов основным элементом является стержень (брус), т. е. тело, толщина и ширина которого несомненно меньше его длины. Если два измерения – длина и ширина – много больше толщины, то такое тело называется пластиной. Если поверхности пластины криволинейные, то это – оболочка. А если все три измерения одного порядка, то такое тело называют массивным телом.

1.2. Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Одной из важнейших задач в сопротивлении материалов является определение внутренних силовых факторов (усилий). Для их нахождения используют метод сечений. Рассмотрим применение этого метода в общем случае нагружения. Пусть тело K нагружено внешними силами F, q, T (рис. 1.1). Необходимо найти внутренние усилия в плоскости тела, получающейся в результате его пересечения плоскостью P . Тело находится в равновесии, оно неподвижно.

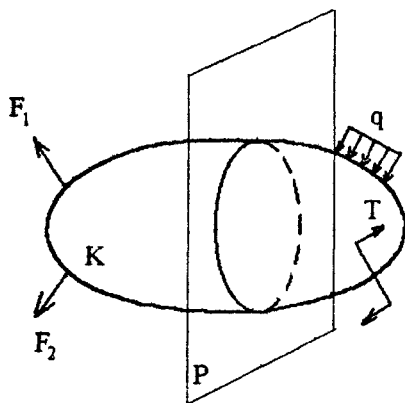


Рис. 1.1

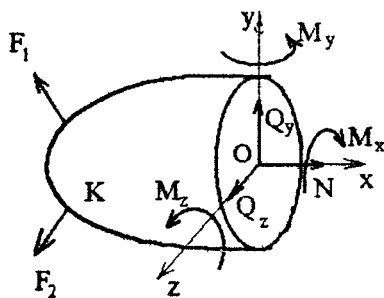


Рис. 1.2

Рассекаем тело K плоскостью P . Отбросим одну часть, например, правую. Изобразим отдельно оставшуюся часть тела (рис. 1.2) и покажем оси координат x, y, z с началом в центре тяжести сечения O . Заменяем действие отброшенной правой части тела на оставшуюся левую внутренними усилиями.

Из курса теоретической механики известно, что в этом случае в точке O будут действовать два силовых фактора: главный вектор и главный момент. Покажем проекции на оси этих силовых факторов: главного вектора — N, Q_y, Q_z и главного момента

M_x, M_y, M_z (рис. 1.2). Теперь оставшуюся часть тела, нагруженную внешними силами и внутренними усилиями, можно рассматривать находящейся в равновесии. Составим уравнения равновесия.

Для пространственной системы сил можно составить 6 уравнений равновесия, из которых определяются шесть внутренних силовых факторов:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, & N &= \sum F_{ix}, \\ \sum Y_i &= 0, & Q_y &= \sum F_{iy}, \\ \sum Z_i &= 0, & Q_z &= \sum F_{iz}, \\ \sum m_x &= 0, & M_x &= \sum T_{ix}, \\ \sum m_y &= 0, & M_y &= \sum M_{iy}, \\ \sum m_z &= 0, & M_z &= \sum M_{iz}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь внутренние силовые факторы имеют следующие названия: N — продольная (реже — нормальная) сила; Q_y и Q_z — поперечные (перерезывающие)

силы в направлении, соответственно, осей y и z ; M_x или M_d – крутящий момент; M_y и M_z – изгибающие моменты относительно осей y и z . Правые части выражений (1.1) представляют собой: $\sum F_{ix}$ – сумма проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть, на нормаль к плоскости сечения, т. е. на ось x ; $\sum F_{iy}$ и $\sum F_{iz}$ – сумма проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть, на соответствующие оси y и z ; $\sum T_{ix}$ – сумма моментов всех внешних сил, действующих на отсеченную часть, относительно геометрической оси x ; $\sum M_{iy}$ и $\sum M_{iz}$ – сумма моментов всех внешних сил, действующих на отсеченную часть, относительно осей y и z .

Таким образом, можно сформулировать правило определения внутренних силовых факторов: внутренние силы N , Q_y и Q_z численно равны алгебраической сумме проекций всех внешних сил (в том числе и реакций), действующих на отсеченную часть тела, т. е. по одну сторону сечения, на соответствующие оси x , y или z . Аналогично, из трех последних строчек выражения (1.1) следует: значение внутренних силовых факторов M_d , M_y и M_z численно равно алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону сечения, относительно соответствующих осей x , y и z .

Эти же значения внутренних усилий можно получить, рассматривая равновесие правой части [попробуйте самостоятельно изобразить правую часть с обозначением всех внутренних силовых факторов и внешних сил и записать выражение, аналогичное (1.1)].

Учет независимости внутреннего усилия в сечении от выбора стороны (левой, правой) отсеченной части позволяет выбирать более простой вариант определения внутренних силовых факторов. Например, если для конкретной системы можно выбрать отсеченную часть, в которую не входят реакции связей (например, консольная балка), то внутренние силовые факторы можно находить без определения реакций.

Необходимо отметить одно важное обстоятельство. От уровня понимания и усвоения метода сечений зависит успешное изучение всего курса сопротивления материалов. Внутренние усилия необходимо знать для проведения прочностных расчетов. Принимая во внимание важность этого раздела, запишем кратко последовательность основных шагов при применении метода сечения.

Рассекаем тело плоскостью на две части

Отбрасываем одну из частей тела

РОЗУ *Заменяем действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силовыми факторами*

Уравнение равновесия составляем

Итак, в общем случае нагружения в поперечном сечении могут действовать шесть внутренних силовых факторов. Внутренние усилия, возникающие в сечении бруса, определяют вид нагружения (деформации). Если действует только одно внутреннее усилие, то такой вид нагружения (и деформации) называют простым. Различают следующие виды нагружений и деформаций (см. табл.1).

Таблица 1

Действующие внутренние силовые факторы	Вид нагружения (деформации)
N – продольная (нормальная) сила	Растяжение или сжатие
Q – поперечная (перерезывающая) сила	Сдвиг или срез
M_x – крутящий момент	Кручение
M_z или M_y – изгибающий момент	Изгиб
Одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов	Сложное сопротивление

Примеры определения внутренних усилий для простых схем нагружения приведены ниже в соответствующих разделах (растяжение – 2.1, сдвиг и кручение – 5.1 – 5.2, изгиб – 6.1). Следует начать изучение этого материала именно с самых простых схем, при этом обратите особое внимание на правило знаков внутренних силовых факторов.

1.3. Понятие о напряжениях и деформациях

Внутренние усилия в сечении представляют собой интегральную величину локальных (местных) усилий, распределенных по всему сечению. В общем случае интенсивность локальных внутренних усилий будет различна в разных точках сечения. Поэтому в дальнейшем удобнее оперировать понятием напряжения, представляющего собой внутреннюю силу, отнесенную к единице площади в данной

точке рассматриваемого сечения.

Пусть на элементарную площадку dA (рис. 1.3) действует внутреннее усилие dR , тогда полное напряжение p_i определится выражением:

$$p_i = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} \quad (1.2)$$

или

$$p_i = \frac{dR}{dA} \quad (1.3)$$

Если проекции вектора dR составляют dN и dQ , то нормальные напряжения σ и касательные τ , соответственно, запишутся:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau = \frac{dQ}{dA} \quad (1.4)$$

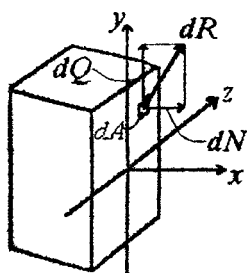


Рис. 1.3

В общем случае между напряжениями существует связь:

$$P = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \quad (1.5)$$

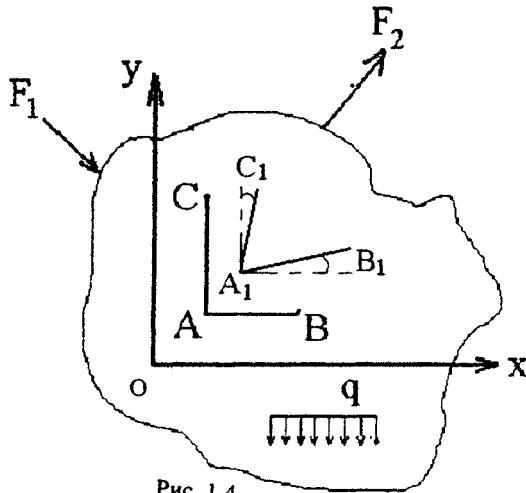


Рис. 1.4

Под действием внешних сил любое тело деформируется, т. е. изменяет размеры и форму.

В произвольной точке недеформированного тела (рис. 1.4) возьмем два отрезка АВ и АС, параллельные осям x и y . После нагружения тела и его деформации отрезки займут положения, соответственно, A_1B_1 и A_1C_1 .

Линейной относительной деформацией в точке А по направлению x (обозначается ε_x) будет предел отношения приращения отрезка АВ к его длине при стремлении длины АВ к нулю:

$$\varepsilon_x = \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} \quad \text{аналогично} \quad \varepsilon_y = \lim_{AC \rightarrow 0} \frac{A_1 C_1 - AC}{AC}. \quad (1.6)$$

Также может быть определена и деформация AD в направлении оси z (на рис. 1.4. не показано):

$$\varepsilon_z = \lim_{AD \rightarrow 0} \frac{A_1 D_1 - AD}{AD} \quad (1.7)$$

Изменение угла $\angle CAB$ в плоскости XOY называют угловой деформацией (сдвиговой деформацией) и обозначают γ_n :

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{AB \rightarrow 0 \\ AC \rightarrow 0}} (\angle B_1 A_1 C_1 - \angle BAC). \quad (1.8)$$

Аналогично могут быть записаны деформации сдвига и в остальных двух взаимно перпендикулярных плоскостях χ_{1z} и χ_{xz}

Итак, в курсе сопротивления материалов излагаются наиболее простые методы расчета. При этом вводятся упрощающие гипотезы (допущения), позволяющие реальную конструкцию представить в виде расчетной схемы. Эти допущения распространяются на материал, нагрузку и геометрию тела. Вводятся понятия внутренних усилий, определяемых методом сечений и напряжений, представляющих собой внутренние усилия, отнесенные к единице площади. Под действием сил точки тела перемещаются, а количественной мерой этих перемещений служат деформации – линейные и угловые.

2. Растяжение и сжатие

2.1. Внутренние усилия, напряжения, деформации

2.1.1. Продольная сила. Растяжение – простой вид нагружения, когда только один внутренний силовой фактор “продольная сила” не равен нулю. Других внутренних усилий нет. Растягивающее внутреннее усилие, т. е. направленное от сечения, считают положительным, сжимающее – отрицательным. На рис. 2.1 показано определение внутренних усилий при растяжении (сжатии). Применяем метод сечений.

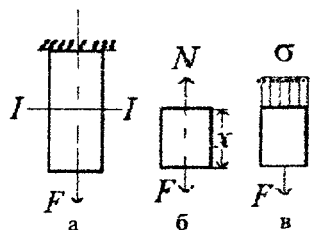


Рис.2.1

Рассекаем стержень плоскостью I-I (рис. 2.1, а), отбрасываем верхнюю часть (выше I-I), прикладываем N (рис. 2.1, б) и составляем уравнение равновесия:

$$\sum F_{i,x} = 0, N_{(x)} - F = 0, N_{(x)} = F.$$

Внутреннее усилие в рассматриваемом случае не зависит от x , постоянно по всей длине стержня.

Если к стержню в различных сечениях приложено несколько сил, внутренние усилия по длине на различных участках стержня будут различными.

Для наглядности строят график изменения $N_{(x)}$ по длине стержня, который называют эпюрой продольных сил.

Пример 1. Стержень находится под действием сил $F_1=40$ кН, $F_2=20$ кН и $F_3=60$ кН, $l_1=l_2=l_3=1$ м, $A_2=2A_1=4$ см² (рис. 2.2, а). Определить внутренние усилия. Построить эпюры.

Решение. Разбиваем стержень на участки, границами которых будут сечения, в которых приложены силы. Получим три участка: I, II и III.

Для определения внутренних силовых факторов воспользуемся методом сечений. На участке I проведем сечение 1-1 и отбросим левую часть бруса (рис. 2.2, б). Затем приложим к сечению 1-1 продольную силу N_1 , заменяющую действие отброшенной части стержня на оставшуюся правую часть. В соответствии с уравнениями (1.1) другие внутренние силовые факторы равны нулю, так как равны нулю правые части уравнений равенства. Прикладываем положительное, т. е. растягивающее, направленное от сечения 1-1 внутреннее усилие N_1 . Составим уравнение равновесия для правой части:

$$\sum X = F_1 - N_1 = 0, N_1 = F_1 = 40 \text{ кН.}$$

Очевидно, что такое же значение N_1 будет в любом сечении участка вплоть до сечения, в котором приложена сила F_2 .

На участке II проведем сечение 2-2 и выполним аналогичные предыдущим действия. Отбросим левую отсеченную часть и заменим ее действие на оставшуюся растягивающей, т. е. положительной, продольной силой N_2 (рис. 2.2, в). Составим уравнение равновесия.

$$\sum X = F_1 - F_2 - N_2 = 0, N_2 = F_1 - F_2 = 40 - 20 = 20 \text{ кН.}$$

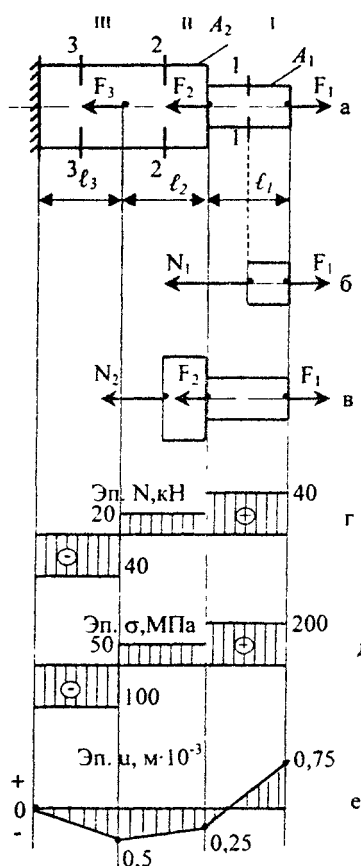


Рис. 2.2

Как видим, полученные выражения N_1 и N_2 равны сумме всех сил, действующих по одну сторону от сечения. Это правило было отмечено выше при обсуждении уравнений равновесия (1.1).

Пользуясь этим правилом, можно определить внутреннее усилие на III участке без построений, приведенных на рис. 2.2, б, в, а сразу записав сумму проекций всех сил, действующих на отсеченную часть, т. е.

$$N_3 = F_1 - F_2 - F_3 = 40 - 20 - 60 = -40 \text{ кН.}$$

Отрицательное значение N_3 показывает, что внутреннее усилие будет сжимающим.

Теперь можно перейти к построению эпюры внутренних силовых факторов – в данном случае продольных сил. Проведем ось, параллельную геометрической оси бруса, и отложим определенные выше значения N в произвольно выбранном масштабе по перпендикулярам к проведенной оси (рис. 2.2, г). Положительные значения N откладываем вверх, отрицательные – вниз. Построенную эпюру штрихуем перпендикулярно к оси, так что каждая линия штриховки представляет собой величины N в соответствующем сечении.

Можно было бы определить величины N , рассматривая равновесие левой отсеченной части бруса. В этом случае необходимо предварительно определить реакции в заделке, что усложнило бы решение задачи.

2.1.2. Напряжения в поперечном сечении. В соответствии с выражением (1.4)

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (2.1)$$

где A – площадь поперечного сечения.

Из опыта известно, что центрально приложенная сила приводит к равномерному растяжению стержня, а следовательно, и постоянству напряжений по поперечному сечению (рис. 2.1, в). Поэтому

$$N = \sigma A, \quad \sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.2)$$

Если известны внутреннее усилие N и площадь поперечного сечения A , по (2.2) можно определить напряжения σ в любом сечении и построить эпюру σ . На рис. 2.2, д приведена эпюра σ для рассмотренного выше примера 1.

2.1.3. Перемещения и деформации Закон Гука.

При действии продольной силы удлинение образца определяется по закону Гука (рис.2.3)

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA}. \quad (2.3)$$

Здесь $\Delta \ell$ – абсолютное удлинение ($\Delta \ell = \ell_1 - \ell_0$),

A – площадь поперечного сечения,

E – модуль нормальной упругости (модуль Юнга).

Модуль Юнга – физическая константа материала. Для стали $E = (2 - 2,13) \cdot 10^5$ МПа. Для других материалов E можно взять из таблиц. В соответствии с определением:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}, \quad (2.4)$$

где ε – относительная *линейная* деформация.

С учетом формул (2.2 и 2.4) выражение (2.3) можно записать в виде:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (2.5)$$

Абсолютная *поперечная* деформация $\Delta b = b_0 - b_1$ (рис. 2.3), а относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b_0}. \quad (2.6)$$

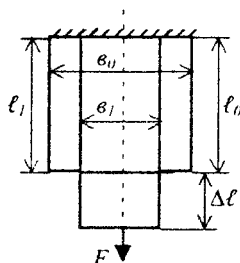


Рис. 2.3

Отношение поперечной деформации к продольной при растяжении является постоянной величиной. Абсолютная величина этого отношения называется *коэффициентом Пуассона* или *коэффициентом поперечной деформации*

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.7)$$

Для сталей эта величина равна 0,25 – 0,33.

Наряду с вычислением деформаций в ряде случаев необходимо установить перемещения отдельных сечений или узлов конструкций. Для стержня (рис. 2.3) перемещение свободного конца стержня u равно $\Delta \ell$, т.к. второй конец стержня закреплен. Перемещение любого сечения стержня $u_{x,x}$ на расстоянии x от места закрепления в соответствии с формулой (2.3) определится выражением $u_x = \frac{N}{E \cdot A} x$.

В качестве примера построим эпюру перемещений u для стержня, изображенного на рис 2.2.

Удлинения стержня $\Delta \ell_1$, $\Delta \ell_2$ и $\Delta \ell_3$ на участках 1, 2 и 3 составят:

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{EA_1} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 10^{-3} \text{ м.}$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{EA_2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$\Delta \ell_3 = \frac{N_3 \cdot \ell_3}{EA_2} = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Так как левое сечение стержня неподвижно, т. е. перемещение его равно нулю, перемещение сечения, в котором приложена сила F_3 , составит $\Delta \ell_3 = -0,5 \cdot 10^{-3}$ м. Относительно этого сечения, сечение, в котором приложена сила

F_2 , переместится на $0,25 \cdot 10^{-3}$ м. Аналогично найдем перемещение конца стержня, которое составит $0,75 \cdot 10^{-3}$ м. По этим данным строим график (эпюру) перемещений u (рис. 2.2, е).

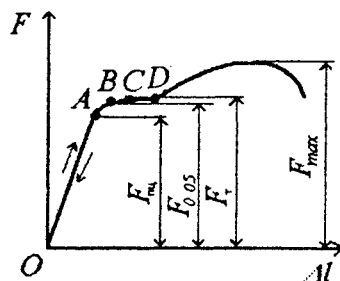


Рис. 2.4

2.2. Механические свойства материалов

Одним из основных факторов обеспечения прочности, как отмечено во введении, являются свойства материала. Их определяют при механических испытаниях образцов из данного материала. Наиболее распространены испытания

на растяжение. В процессе растяжения образца на специальной испытательной машине автоматически записывается диаграмма растяжения “нагрузка F – удлинение $\Delta \ell$ ”. На рис. 2.4 приведена характерная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали. Затем обрабатывают диаграмму. От начала нагружения до точки A справедлив закон Гука. При снижении нагрузки на этом участке разгрузка пойдет вдоль линии OA. Максимальное напряжение, до которого справедлив закон Гука, называют *пределом пропорциональности* $\sigma_{\text{пц}}$. Его определяют по формуле

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0}. \quad (2.8)$$

Если остаточная деформация, т. е. невозвращения образца к исходным размерам, составляет 0,05 % (точка B), то соответствующее ей напряжение называют *пределом упругости* $\sigma_{0,05}$, т. е.

$$\sigma_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{A_0}. \quad (2.9)$$

Участок CD, параллельный оси $\Delta \ell$, называют *площадкой текучести*. Здесь деформация происходит при постоянной нагрузке F_T . Соответствующие напряжения называют *физическим пределом текучести* σ_T и определяют по формуле

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0} \quad (2.10)$$

Напряжение, соответствующее максимальной нагрузке F_{max} , называют *временным сопротивлением* или *пределом прочности* σ_B , выражающимся формулой

$$\sigma_B = \frac{F_{max}}{A_0} \quad (2.11)$$

Основными характеристиками прочности, используемыми в практических расчетах, являются $\sigma_{0.05}$, σ_T и σ_B . Для малоуглеродистой стали, имеющей площадку текучести, например, для стали Ст.2, эти характеристики следующие: $\sigma_{0.05} = 200$ МПа, $\sigma_T = 220 - 260$ МПа, $\sigma_B = 340 - 420$ МПа.

После разрушения образца определяют характеристики пластичности: *относительное удлинение после разрыва*

$$\delta_p = \frac{\ell_k - \ell_0}{\ell_0} 100 \% \quad (2.12)$$

где ℓ_0 — соответственно, исходная, ℓ_k — конечная, после разрыва, расчетная длина образца;

относительное сужение после разрыва

$$\psi_p = \frac{A_0 - A_k}{A_0} 100 \%, \quad (2.13)$$

где A_0 и A_k — соответственно исходная и конечная, после разрушения, площадь поперечного сечения.

2.3. Расчеты на прочность и жесткость

Размеры деталей в конструкциях должны быть такими, чтобы возникающие в них напряжения не вызывали нарушения работоспособности конструкции. При напряжениях, равных пределу текучести, возникают остаточные деформации, а при пределе прочности происходит разрушение детали. В работающей конструкции такие напряжения, естественно, возникать не должны. Их ограничивают допускаемыми напряжениями $[\sigma]$, которые определяют по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{оп}}{n} \quad (2.14)$$

где $\sigma_{оп}$ — опасные напряжения (σ_m для пластичных и σ_B — для хрупких материалов), n — коэффициент запаса прочности, который колеблется в пределах 1,4 — 3,0 и более.

Прочность детали будет обеспечена, если выполняется условие:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad (2.15)$$

которое называют условием прочности по допускаемым напряжениям при растяжении. Из него вытекает три вида расчетов:
проектировочный расчет

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A}, \quad A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]};$$

определение допускаемых нагрузок:

$$N_{доп} = [\sigma] \times A;$$

проверка прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma].$$

Иногда, дополнительно, ставится условие ограничения величины упругого перемещения (удлинения) δ какой-либо точки системы заданным допускаемым значением $[\delta]$. В этом случае проводят расчет на жесткость аналогично расчету на прочность:

$$\Delta \ell_{max} \leq [\Delta \ell]. \quad (2.16)$$

В качестве резюме отметим следующее. *Растяжение* – вид деформации (нагружения), вызываемый центрально приложенной продольной силой. В поперечном сечении возникают равномерно распределенные по сечению нормальные напряжения σ . Связь между деформациями и напряжениями описывается законом Гука и характеризуется для изотропного тела двумя упругими постоянными – E , μ . Испытаниями на растяжение определяются основные механические свойства материала. По ним устанавливают допускаемые напряжения. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям сводится к тому, чтобы действующие в стержне максимальные напряжения не превышали допускаемых, определяемых свойствами материала.

3. Основы теории напряженного и деформированного состояния.

Теории прочности

3.1. Напряжения по наклонным площадкам при растяжении

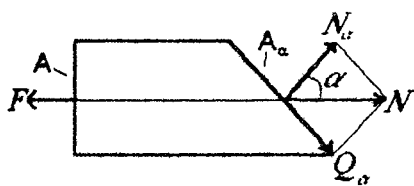


Рис.3.1

По формуле (2.2) определяется напряжение в поперечном сечении стержня. По площадкам, наклоненным к этому сечению под углом α (рис. 3.1), будут действовать нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения, так как возникает нормальное усилие $N_\alpha = N \cos \alpha$ и касательное усилие $Q_\alpha = N \sin \alpha$:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \cos \alpha}{A / \cos \alpha} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad (3.1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \sin \alpha}{A / \cos \alpha} = \frac{N \sin \alpha \cos \alpha}{A} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha, \quad (3.2)$$

где $A_\alpha = A / \cos \alpha$ – площадь наклонной площадки.

Видно, что

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_{\max} \quad \text{при } \alpha = 0^\circ; \\ \tau_\alpha &= \tau_{\max} \quad \text{при } \alpha = 45^\circ.\end{aligned}$$

3.2. Напряженное состояние в точке. Главные напряжения. Виды напряженного состояния

Напряженным состоянием в точке называется совокупность напряжений, возникающих во множестве площадок, проходящих через рассматриваемую точку. В общем случае по площадкам любого элемента будут действовать три компонента напряжений, а по трем взаимно перпендикулярным площадкам – 9 компонентов (рис. 3.2). Их можно представить в виде тензора напряжений:

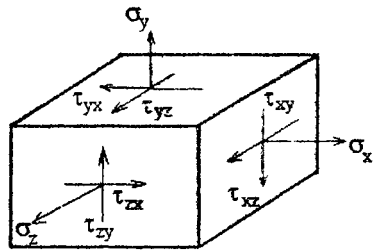


Рис. 3.2

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Из выражений (3.1 и 3.2) видно, что при повороте площадки компоненты напряжений меняются, хотя напряженное состояние одно и то же. Имеется только одна ориентация взаимно перпендикулярных площадок, по которым будут действовать только нормальные напряжения, а касательные равны нулю (рис. 3.3). Такие площадки называют *главными площадками*,

а нормальные напряжения на них – *главными напряжениями*. Их обозначают σ_1 , σ_2 и σ_3 , причем выбирают (с учетом знака):

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Напряжения σ_1 и σ_3 являются соответственно наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями из всех возможных значений для конкретного напряженного состояния. А поскольку рис. 3.2 и рис. 3.3 отражают одно и то же напряженное состояние элемента, можно говорить, что эти напряженные состояния одинаковы, и тензор напряжений примет вид:

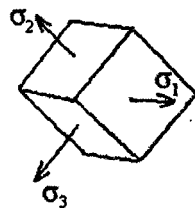


Рис. 3.3

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

В зависимости от числа действующих, т. е. не равных нулю, главных напряжений различают следующие виды напряженных состояний:

объемное – все три главных напряжения не равны нулю,

плоское – два главных напряжения не равны нулю,

линейное – одно главное напряжение не равно нулю.

При растяжении имеет место линейное напряженное состояние.

3.3. Напряжения по наклонным площадкам при плоском напряженном состоянии

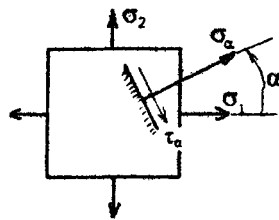


Рис. 3.4

Если действуют два главных напряжения, например, σ_1 и σ_2 , то значения σ_α и τ_α , действующие на площадке, повернутой на угол α (рис. 3.4), на основании принципа независимости действия сил и в соответствии с формулами (3.1) и (3.2), примут вид:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 [-(90^\circ - \alpha)] = \quad (3.5)$$

$$= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2 [-(90^\circ - \alpha)] = \quad (3.6)$$

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

По перпендикулярной площадке соответствующие компоненты напряжений можно найти, заменив угол α в выражениях (3.5) и (3.6) на угол $\beta = 90^\circ - \alpha$. Получим:

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \quad (3.7)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.8)$$

Из анализа выражений (3.5 – 3.8) следуют две важнейшие закономерности:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (3.9)$$

т. е. сумма нормальных напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам – величина постоянная и

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta. \quad (3.10)$$

Это закон парности касательных напряжений: касательные напряжения по взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку. Закономерности (3.9 и 3.10) справедливы для любого напряженного состояния.

Из формулы (3.6) следует, что при $\alpha=45^\circ$ ($\sin 2\alpha=1$) касательные напряжения максимальны

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (3.11)$$

Таким образом максимальные касательные напряжения в точке равны полуразности главных напряжений и действуют на площадках, наклоненных к главным под углом 45° .

3.4. Определение главных напряжений и положения главных площадок

Рассмотрим задачу определения главных напряжений σ_1 и σ_3 при плоском напряженном состоянии, если известны компоненты напряжений на площадках

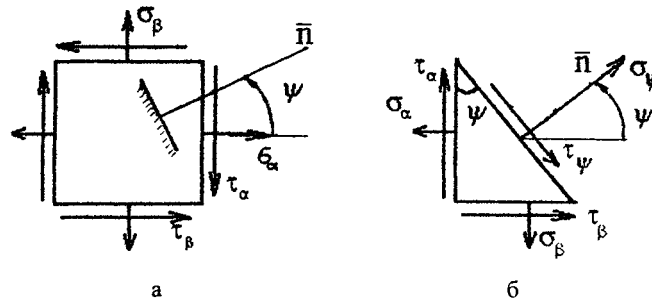


Рис. 3.5

общего положения (рис.3.5, а).

Рассмотрим равновесие элемента, показанного на рис.3.5, б. Пусть ψ – угол между направлением и нормалью n к площадке, площадь которой обозначим dA . Тогда площадь вертикальной грани элемента будет $dA \cos \psi$, а горизонтальной $dA \sin \psi$. Проектируя все силы на направление нормали n , запишем $\sigma_\psi dA - \sigma_\alpha dA \cos \psi \cos \psi + \tau_\alpha dA \cos \psi \sin \psi + \tau_\beta dA \sin \psi \sin \psi + \sigma_\beta dA \sin \psi \sin \psi = 0$

Проектируя все силы на направление τ_ψ , получим $\tau_\psi dA - \sigma_\alpha dA \cos \psi \sin \psi - \tau_\alpha dA \cos \psi \cos \psi + \tau_\beta dA \sin \psi \sin \psi + \sigma_\beta dA \sin \psi \cos \psi = 0$.

Сокращая на dA и используя формулы двойных углов, найдем σ_ψ и τ_ψ

$$\sigma_\psi = \sigma_\alpha \cos^2 \psi + \sigma_\beta \sin^2 \psi - \tau_\alpha \sin 2\psi, \quad (3.12)$$

$$\tau_\psi = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2} \sin 2\psi + \tau_\alpha \cos 2\psi. \quad (3.13)$$

Чтобы найти ψ , при котором по площадкам будут действовать главные напряжения σ_1 и σ_2 , имеющие экстремальные значения, нужно приравнять к нулю $\frac{d\sigma_\psi}{d\psi}$ или приравнять к нулю τ_ψ , так как на главных площадках касательные

$$\text{напряжения равны нулю. В обоих случаях } \operatorname{tg} 2\psi_0 = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} \quad (3.14)$$

Для определения величины главных напряжений σ_1 и σ_2 подставим в формулу (3.12) $\psi = \psi_0$ из выражения (3.14), предварительно выразив тригонометрические функции в (3.12) через тангенс двойного угла. После несложных преобразований получим:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2} \quad (3.15)$$

В этой формуле знак плюс соответствует максимальному главному напряжению $\sigma_{\max} = \sigma_1$, а минус – второму главному напряжению $\sigma_{\min} = \sigma_2$.

3.5. Зависимости между напряжениями и деформациями в общем случае нагружения (обобщенный закон Гука)

Рассмотрим деформацию элемента, изображенного на рис. 3.6.

Пусть ϵ_1 – суммарная деформация в направлении σ_1 . Деформация в направлении удлинения от σ_1 в соответствии с (2.5) запишется в виде:

$$\epsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}.$$

Но от σ_2 и σ_3 элемент в соответствии с (2.6) будет сжиматься на величину

$$\epsilon_1'' = \mu \frac{\sigma_2}{E} + \mu \frac{\sigma_3}{E},$$

а общая деформация ϵ_1 равна алгебраической сумме ϵ_1' и ϵ_1'' , т. е.

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Аналогично

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}, \quad (3.16)$$

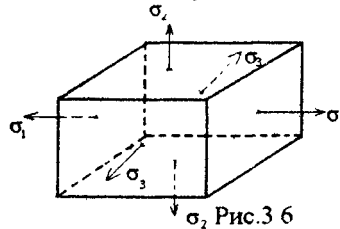
$$\epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}.$$

Вместе эти три выражения носят название обобщенного закона Гука, а ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 называют главными деформациями.

3.6. Изменение объема при деформации

Если до деформации стороны элемента имели размеры a , b и c , то после деформации $a(1 + \epsilon_1)$, $b(1 + \epsilon_2)$ и $c(1 + \epsilon_3)$. Легко рассчитать относительное изменение объема ν_0 :

$$\nu_0 = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3. \quad (3.17)$$



Подставим значения ε_i из выражения (3.16), получим

$$\nu_0 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.18)$$

3.7. Работа внешних сил и потенциальная энергия упругой деформации

Затраченная на деформирование энергия (работа внешних сил) равна площади заштрихованного треугольника (рис. 3.7), т. е.

$$P = \frac{F\Delta l}{2}. \quad (3.19)$$

Работа внешних сил преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации тела U , т. е.

$$U = P = \frac{N^2 \ell}{2EA}, \quad (3.20)$$

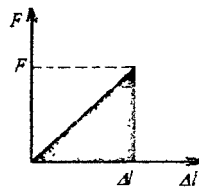


Рис. 3.7

так как $\Delta l = \frac{N\ell}{EA}$.

Удельная потенциальная энергия упругой деформации

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N^2 2\ell}{2A(EA)} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}, \quad (3.21)$$

где $V = A \cdot \ell$ – деформируемый объем.

При объемном напряженном состоянии

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) \quad (3.22)$$

или с учетом (3.16)

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)). \quad (3.23)$$

4. Геометрические характеристики плоских сечений

4.1. Статические моменты и моменты инерции

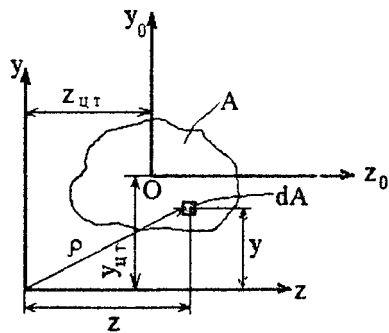


Рис. 4.1

В расчете на прочность при растяжении для оценки геометрических размеров поперечного сечения было достаточно знание одного параметра – площади поперечного сечения A , а поперечное сечение может быть круглым, квадратным, прямоугольным и т. д. Опыт показывает, что, например, при изгибе стержня картина оказывается более сложной. Это можно проследить на изгибе обычной линейки: при одной и той же площади поперечного сечения ее легко изогнуть руками в “слабом”

направлении, положив ее “плашмя”, и практически невозможно – в перпендикулярном ему. Поэтому для количественной оценки размеров тела необходимы другие геометрические характеристики.

Из курса теоретической механики известно определение положения центра тяжести сечения:

$$z_{цт} = \frac{S_z}{A}, \quad y_{цт} = \frac{S_y}{A}, \quad (4.1)$$

где $y_{цт}$ и $z_{цт}$ – положение центра тяжести в координатах x, z ; $S_y = \int_A z dA$ и

$S_z = \int_A y dA$ – статические моменты площади относительно осей y и z (рис. 4.1).

Относительно осей, проходящих через центр тяжести, S_{y_0} и S_{z_0} будут равны нулю.

При изучении простых видов нагружения “кручение” и “изгиб” придется иметь дело со следующими геометрическими характеристиками: *осевые моменты инерции сечения относительно осей y и z , соответственно,*

$$J_y = \int_A z^2 dA \quad \text{и} \quad J_z = \int_A y^2 dA; \quad (4.2)$$

полярный момент инерции сечения

$$J_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.3)$$

$$\text{видно, что } J_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = J_z + J_y; \quad (4.4)$$

центробежный момент инерции сечения

$$J_{yz} = \int_A yz dA. \quad (4.5)$$

Рассмотрим определение осевого момента инерции для простого сечения, например, для прямоугольника (рис. 4.2).

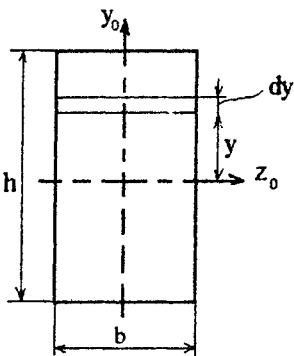


Рис.4.2

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.6)$$

$$\text{Аналогично получим } J_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.7)$$

Определим J_p для круга радиусом R (рис. 4.3).

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (4.8)$$

Здесь

$$dA = 2\pi \rho d\rho.$$

Из условия симметрии круга, с учетом (4.4) видно, что

$$J_z = J_y = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (4.9)$$

4.2. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте координатных осей

При параллельном переносе осей, из которых одна пара их является центральной, получим (рис. 4.4).

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (a + y_0)^2 dA = \int_A a^2 dA + \int_A 2ay_0 dA + \int_A y_0^2 dA, \quad (4.10)$$

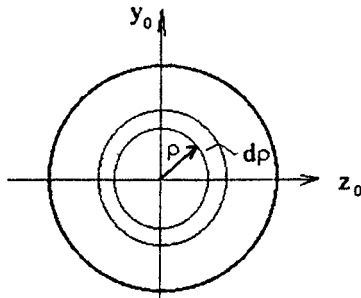


Рис.4.3

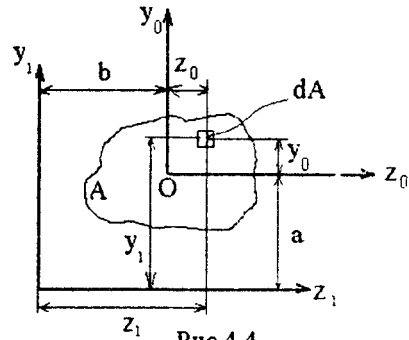


Рис.4.4

так как y_0, z_0 – оси центральные, то, и $\int_A y_0 dA = 0$. Выражение (4.10) запишется в виде:

$$J_{z_1} = J_{z_0} + a^2 A, \quad (4.11)$$

$$\text{аналогично } J_{y_1} = J_{y_0} + b^2 A. \quad (4.12)$$

Центробежный момент инерции

$$J_{z_1 y_1} = J_{z_0 y_0} + abA. \quad (4.13)$$

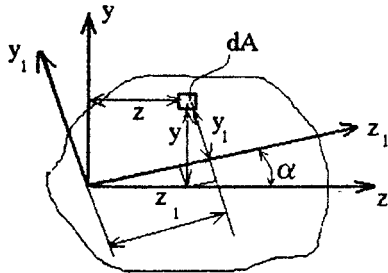


Рис. 4.5

При повороте осей на угол α координаты y_1 и z_1 в новых осях можно записать в виде (рис. 4.5): $z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha$.

$$y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha. \quad (4.14)$$

Соответственно, осевые моменты инерции относительно осей z_1 и y_1 при известных J_z и J_y и угле поворота осей α примут вид:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha, \\ J_{y_1} &= J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Центробежный момент инерции:

$$J_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha. \quad (4.16)$$

Из (4.15) видно: $J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y$, (4.17)

т. е. сумма осевых моментов инерции при повороте осей не меняется.

4.3. Главные оси инерции и главные моменты инерции

При повороте осей можно определить угол α_0 , при котором J_{z_1} и J_{y_1} будут иметь экстремальные значения, для чего необходимо взять первую производную по α от J_{z_1} или J_{y_1} (4.15) и приравнять ее к нулю.

Получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}. \quad (4.18)$$

Если относительно осей, повернутых на угол α_0 , один осевой момент инерции будет максимален, то, в соответствии с (4.17), другой – минимален. Такие оси называются *главными*, а осевые моменты относительно них, найденные при подстановке в формулы (4.15) $\alpha = \alpha_0$, называются *главными моментами инерции*.

Такое же выражение (4.18) для угла α_0 получается из выражения (4.16), если центробежный момент инерции $J_{z_1 y_1}$ приравнять нулю. Следовательно, относительно главных осей инерции центробежный момент инерции равен нулю.

После подстановки в формулы (4.15) $\alpha = \alpha_0$ и замены $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$ через функцию двойного угла, формулы для определения главных моментов инерции примут вид:

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}. \quad (4.19)$$

Главные оси, проходящие через центр тяжести, называют главными центральными осями инерции. Видно, что вид формулы и основные понятия имеют много общего с теорией напряженного состояния.

В заключении отметим следующее. Прочность и деформация стержней, в частности, работающих на изгиб, зависят от взаимной ориентации поперечного сечения и плоскости действующих сил. Для характеристики поперечных сечений необходимо знание некоторых понятий и параметров сечений. S_z и S_y – статический момент площади сечения относительно осей z и y ; J_z , J_y , J_z и J_{zy} – осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения относительно соответствующих осей. При параллельном переносе и повороте осей эти параметры меняются. Оси, совпадающие с центром тяжести сечения, называют центральными. Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения (при этом центробежный момент инерции равен нулю), называют главными осями, а осевые моменты – главными центральными моментами инерции. Для симметричных поперечных сечений эти оси совпадают с осями симметрии.

5. Сдвиг. Кручение

5.1. Чистый сдвиг

Сдвиг возникает при действии по граням выделенного элемента касательных напряжений. Если действуют только касательные напряжения, а нормальные

равны нулю, то такой сдвиг называют чистым (рис. 5.1). Принимают, что напряжения равномерно распределены по плоскости сдвига и определяются по формулам

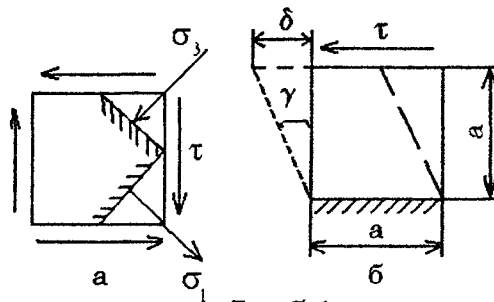


Рис. 5.1

$$\tau = \frac{Q}{A}, \quad (5.1)$$

где Q – внутреннее усилие поперечная (сдвигающая) сила,

A – площадь сдвига.

По известным формулам (3.15) теории напряженного состояния можно определить главные напряжения

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Так как $\sigma_\alpha = 0$, $\sigma_\beta = 0$, откуда $\sigma_1 = +\tau$; $\sigma_3 = -\tau$; $\sigma_2 = 0$.

Наклоны главных площадок определим по формуле (3.14)

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{-2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = -\infty, \quad \psi_0 = -45^\circ.$$

Направление главных напряжений показаны на рис. 5.1, а.

Деформация элемента показана на рис. 5.1, б. Элемент условно закрепим одной гранью, другая под действием напряжений будет смещаться влево.

Величина δ называется абсолютным смещением, а отношение

$\gamma = \delta/a$ – относительным сдвигом.

Экспериментально подтверждается зависимость между напряжениями и деформациями

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (5.2)$$

которая называется законом Гука при сдвиге, G – модуль сдвига – величина, характеризующая сопротивление материала упругим деформациям при сдвиге.

Для стали $G = 8 \cdot 10^3$ МПа. Между модулем нормальной упругости E , коэффициентом поперечной деформации μ и модулем сдвига существует связь:

$$G = E / (1 + \mu) \cdot 2.$$

5.2. Внутренние усилия при кручении. Напряжения при кручении сплошного круглого вала

Кручение – вид нагружения, когда в поперечном сечении стержня не равно нулю только одно внутреннее усилие – крутящий момент (рис. 5.2, а).

Определение *внутренних усилий* по участкам проводим известным нам методом мысленных сечений. На приведенной расчетной схеме можно выделить три участка с различными значениями внутренних усилий – на длинах a , b и c .

Для определения внутренних усилий на участке a рассекаем тело плоскостью 1-1 на расстоянии x от начала координат. Отбросим правую часть. Действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренним усилием – крутящим моментом M_{K1} (рис. 5.2, б).

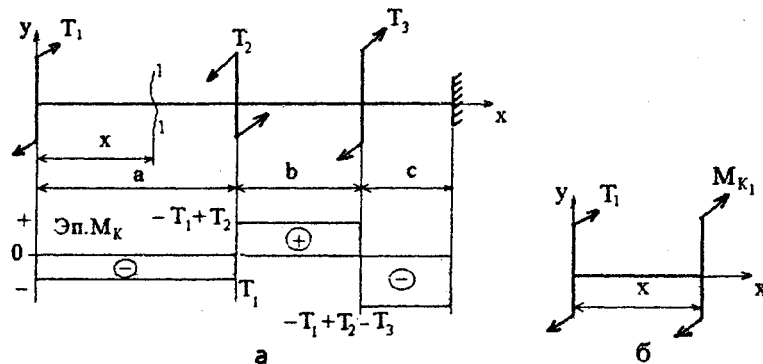


Рис. 5. 2

Другие внутренние усилия равны нулю.

Составим уравнение равновесия.

$$\sum M_x = 0. \quad T_1 + M_{K1} = 0. \quad M_{K1} = -T_1.$$

Из записанного выражения следует, что внутренние усилия M_K всегда будут равны сумме внешних крутящих моментов T_i , расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. Правило знаков внутреннего крутящего момента может быть принято любое, но необходимо строгое его соблюдение при определении M_K по всей длине вала. Поэтому на участках II и III запишем внутренние усилия, уже пользуясь отмеченными правилами:

$$M_{K2} = -T_1 + T_2, \quad M_{K3} = -T_1 + T_2 - T_3.$$

Построим график (эпюру) изменения внутренних усилий по длине вала (рис. 5.2, а). Стержень, испытывающий кручение, называется валом.

Определим *напряжения*, возникающие в поперечном сечении вала (рис. 5.3). Рассмотрим равновесие элемента длиной dx (рис. 5.3, б). Крутящий момент M_K уравнивается моментом сил, создаваемым касательными напряжениями, т. е.

$$\int_A \rho \tau dA = M_K, \quad (5.3)$$

где τ — касательное напряжение, действующее в элементарной площади dA на расстоянии от центра тяжести сечения ρ .

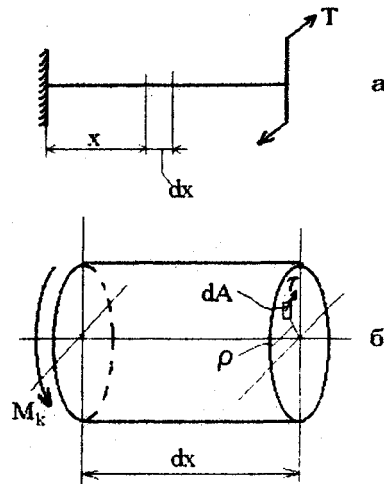


Рис. 5.3

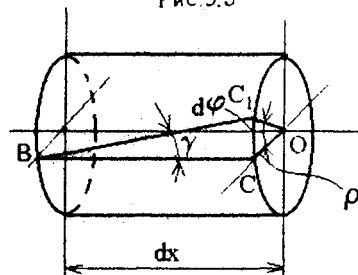


Рис. 5.4

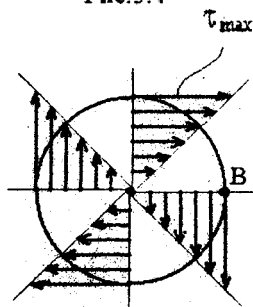


Рис. 5.5

а Чтобы выяснить характер изменения напряжений τ по площади A , рассмотрим деформацию элемента вала длиной dx (рис. 5.4). Примем, что сечение при деформации остается плоским, радиус — прямым, а расстояние dx не меняется. Считаем условно левое сечение неподвижным. Образующая BC повернется на угол γ , точка C займет положение C_1 .

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{CC_1}{BC}, \quad \gamma = \frac{CC_1}{dx} \quad (5.4)$$

В правом сечении радиус $\rho = OC$ повернется на угол $d\varphi$, так что

$$CC_1 = \rho d\varphi. \quad (5.5)$$

Из совместного рассмотрения (5.4) и (5.5) получим

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx} \quad (5.6)$$

$$\text{Из закона Гука} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (5.7)$$

$$\text{Следовательно,} \quad \tau = G \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.8)$$

Подставим (5.8) в (5.3)

$$M_K = \int_A \rho G \frac{d\varphi}{dx} dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA \quad (5.9)$$

$$\text{Так как} \quad J_\rho = \int_A \rho^2 dA,$$

$$\text{а из (5.8)} \quad G \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\tau}{\rho}, \quad (5.10)$$

выражение (5.9) примет вид:

$$\tau = \frac{M_K \cdot \rho}{J_\rho} \quad (5.11)$$

J_ρ для круглого сечения определяли ранее по

формуле (4.8):

$$J_{\rho} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32},$$

а для трубчатого сечения с наружным диаметром D и внутренним d

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4 - \pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right). \quad (5.12)$$

Эпюра τ в соответствии с формулой (5.11) приведена на рис.5.5. При $\rho=0$ $\tau=0$; при $\rho=R$ $\tau=\tau_{\max}$.

5.3. Анализ напряженного состояния при кручении

Вырежем элемент вокруг точки В (рис.5.5), находящейся в области $\tau_{\max}$ в приповерхностном слое и покажем напряжения по его граням (рис. 5.6, а).

На рис. 5.6, б показана плоская картина элемента с действующими по его граням напряжениями.

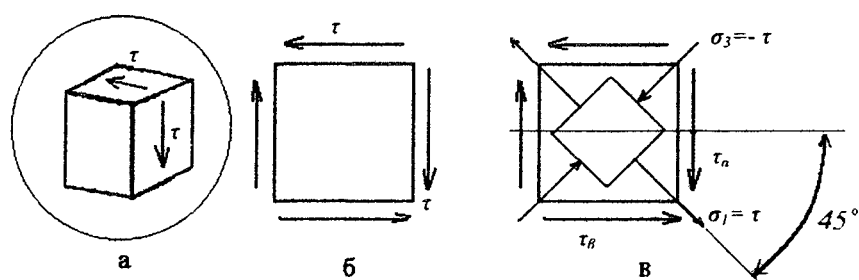


Рис.5.6

Видно, что по граням элемента действуют только касательные напряжения, следовательно, при кручении возникает чистый сдвиг (рис 5.1). Найдем главные напряжения с помощью формулы (3.15). Получим: $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$.

Направление главных площадок (рис. 5.6, в) по которым действуют главные напряжения, находим по формуле (3.14): $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{0} = -\infty$, $\alpha = -45^\circ$.

Итак, при кручении возникает напряженное состояние – чистый сдвиг, при котором главные напряжения равны между собой, противоположны по знаку и численно равны касательным напряжениям. Главные площадки наклонены к площадкам чистого сдвига под углом 45° .

5.4. Расчет на прочность при кручении

Установив величину максимальных касательных напряжений при кручении, формулу их определения можно представить в виде:

$$\tau_{max} = \frac{M_{k\ max} R}{J_{\rho}} = \frac{M_{k\ max}}{W_{\rho}}, \quad (5.14)$$

где $W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{R}$ – полярный момент сопротивления. (5.15)

Для круга $W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16},$ (5.16)

для кольцевого сечения $W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right).$ (5.17)

Условие прочности по допускаемым напряжениям можно записать в виде.

$$\tau_{max} = \frac{M_{k\ max}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (5.18)$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение при сдвиге.

Из (5.18) можно определить диаметр вала, допускаемую нагрузку или проверить прочность.

5.5. Закон Гука при кручении и расчет на жесткость

Из выражения (5.9) можно записать $\varphi = \int_0^l \frac{M_k dx}{GJ_{\rho}}.$ (5.19)

Если в пределах участка $M_k = \text{const}$, то $\varphi = \frac{M_k l}{GJ_{\rho}}$ (5.20)

Помимо расчета на прочность валы проверяют на жесткость, ограничивая

относительный угол закручивания $\theta = \frac{\varphi}{l}$ допускаемой величиной $[\theta]$.

$$\theta_{max} = \frac{M_{k\ max}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta]. \quad (5.21)$$

Из выражения (5.21) можно определить минимальный диаметр вала по условию жесткости; окончательно в расчете назначается большая из условий (5.18) и (5.21) величина диаметра вала.

Итак, кручение – вид деформации стержня (вала), вызываемый парой сил, перпендикулярных геометрической оси, т. е. крутящим моментом. В поперечном сечении круглого сплошного вала возникают касательные напряжения, изменяющиеся от нуля в центре тяжести сечения до максимальных значений при максимальном радиусе. Угол закручивания вала определяется законом Гука, характеристикой упругих свойств материала является модуль касательной упругости G . По результатам испытания на кручение определяют характеристики прочности, по ним – допускаемые напряжения. По аналогии с растяжением, записывают условия прочности по допускаемым напряжениям при кручении, позволяющие проводить прочностные расчеты.

6. Плоский изгиб

6.1. Основные понятия

Внутренние усилия: поперечная сила и изгибающий момент

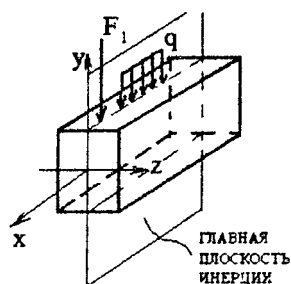


Рис. 6.1

Изгиб — вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает внутреннее усилие *изгибающий момент*. Такой вид изгиба называют *чистым*. Часто одновременно с изгибающим моментом в поперечных сечениях действуют *поперечные силы*, и тогда изгиб называют *поперечным*. Стержень, испытывающий изгиб, называется *балкой*.

Изгиб называют *плоским*, если плоскость действия внешних сил совпадает с *главной плоскостью инерции*, т. е. плоскостью,

проходящей через одну из главных центральных осей инерции и геометрическую ось балки (рис. 6.1). Ось балки деформируется в этой же плоскости. Если силовая плоскость не совпадает с главной плоскостью инерции балки, изгиб называют *косым*.

Определение внутренних усилий проводится известным нам методом сечений. Порядок и особенности его применения рассмотрим на конкретных простейших примерах.

Пример 1.

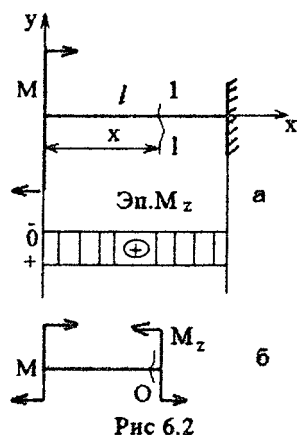


Рис 6.2

Определить внутренние усилия в консольной балке длиной l и нагруженной парой сил.

Рассекаем балку сечением 1-1 на расстоянии x от левого конца на две части (рис. 6.2, а), отбросим правую часть балки, заменим ее действие на оставшуюся внутренними усилиями (рис. 6.2, б). Не равно нулю будет только одно внутреннее усилие — изгибающий момент M_z .

Составим уравнение равновесия — сумму моментов всех сил относительно центра тяжести сечения О (рис. 6.2, б).

$$\sum M_O = M - M_z = 0 \Rightarrow M_z = M.$$

Таким образом, по длине балки действует постоянное по величине внутреннее усилие — изгибающий момент $M_x = M$, т. е. имеем случай чистого изгиба.

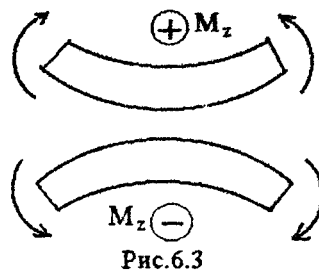


Рис. 6.3

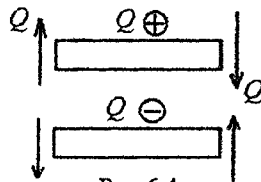


Рис. 6.4

Построим график (эпюру) M_z (рис. 6.2). Эпюра M_z позволит наглядно представить изменение момента по длине балки. Чтобы получить один и тот же знак изгибающего момента в поперечном сечении, независимо от того, равновесие левой или правой части рассматривается в расчете, примем следующее правило знаков изгибающего момента: изгибающий момент положителен, если он выгибает балку выпуклостью вниз (рис. 6.3), и наоборот, отрицателен, если балка от действия этого момента изгибается выпуклостью вверх.

Правило знаков поперечной силы Q .

Q – положительна, если вращает элемент по часовой стрелке, и отрицательно – против часовой стрелки (рис. 6.4)

Пример 2.

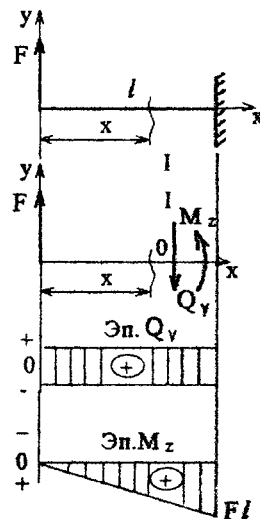


Рис. 6.5

Определить внутренние усилия для консольной балки длиной l , загруженной на левом конце силой F (рис. 6.5).

Рассекаем балку сечением 1–1, отбрасываем правую часть балки, а ее действие на оставшуюся заменим внутренними усилиями. Не равна нулю поперечная сила Q_1 и изгибающий момент M_z . Составим уравнение равновесия:

$$\sum Y = F - Q_1 = 0, Q_1 = F;$$

$$\sum M_0 = F \cdot x - M_z = 0, M_z = F \cdot x.$$

Строим эпюры внутренних усилий. Q постоянно по всей длине. Полученное уравнение M_z представляет линейную зависимость в пределах от нуля до l .

$$\text{При } x=0 \quad M_z = 0$$

$$\text{При } x=l \quad M_z = F \cdot l.$$

Откладывая полученные значения, получим эпюру M_z .

Пример 3.

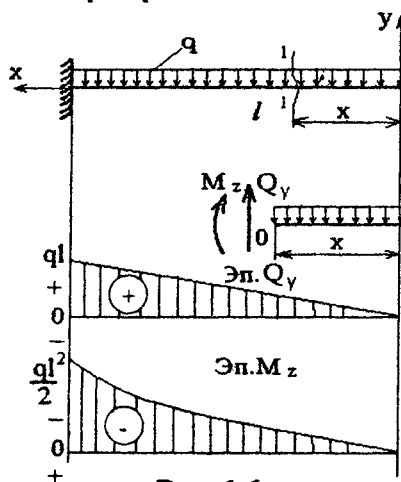


Рис.6.6

Определить внутренние усилия в консольной балке, нагруженной распределенной нагрузкой q по всей длине ℓ (рис. 6.6).

Как и в примерах 1 и 2, удобно начало координат выбрать на свободном конце консоли – не потребуется определять реакции. Рассекаем балку сечением 1-1, отбрасываем левую часть, заменяем ее действие внутренними усилиями и составляем уравнения равновесия (на схеме показаны положительные направления внутренних усилий).

$$\sum Y = -qx + Q_y = 0,$$

$Q_y = qx$ – линейная зависимость:

при $x = 0$, $Q_y = 0$; $x = \ell$ $Q_y = q\ell$ (см. эпюру Q).

$$\sum M_0 = M_z + qx \frac{x}{2} = M_z + q \frac{x^2}{2} = 0,$$

$$M_z = -q \frac{x^2}{2} \text{ – парабола.}$$

$$x = 0, M_z = 0; M_z = -q \frac{\ell^2}{2}.$$

Положение экстремума функции определим, приравняв нулю первую производную:

$$\frac{dM_z}{dx} = -qx = 0.$$

Экстремум M_z при $x = 0$.

Для построения параболы необходимо найти M_z в промежуточных сечениях, например, при $x = \frac{\ell}{2}$.

Пример 4.

Определить внутренние усилия для балки на двух опорах, нагруженной сосредоточенной парой сил M_0 (рис.6.7). Вначале необходимо определить опорные реакции, которые тоже относятся к внешним силам.

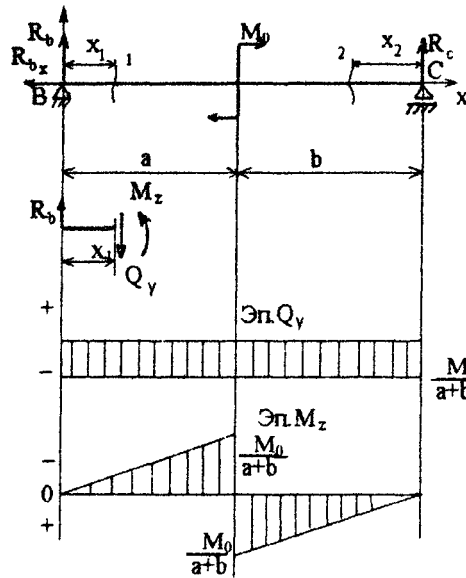


Рис.6.7

$$\sum M_B = 0, M_0 - R_c(a+b) = 0,$$

$$R_c = \frac{M_0}{a+b}.$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$M_0 + R_b(a+b) = 0,$$

$$R_b = -\frac{M_0}{a+b}.$$

$$\sum X = 0, \quad R_{bx} = 0.$$

Проверка:

$\sum Y = 0, R_b + R_c = 0, 0 = 0$. Переходим к определению внутренних усилий по участкам

Участок 1:

$$0 \leq x \leq a, \quad \sum Y = R_b - Q_y = 0$$

$$Q_y = R_b = -\frac{M_0}{a+b}.$$

$$\sum M_i = R_{bx} - M_z = 0,$$

$$M_z = R_b x = -\frac{M_0}{a+b} x.$$

$$x=0 \quad M_z = 0, \quad x=a$$

$$M_z = -\frac{M_0 a}{a+b}.$$

Из приведенных примеров видно, что во всех случаях, как это следует из уравнений равновесия, поперечная сила численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих на одну сторону от рассматриваемого сечения, на ось, перпендикулярную к оси балки, а изгибающий момент – алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести сечения. Использование этих правил позволяет записывать выражения внутренних усилий без дополнительного построения отсеченной части балки и составления уравнений равновесия.

Участок 2: $0 \leq x_2 \leq a$,

$$Q_y = -R_c = -\frac{M_0}{a+b}.$$

$$M_z = R_c x, \quad x=0 \quad M_z = 0, \quad x=b$$

$$M_z = -\frac{M_0}{a+b} b.$$

По полученным данным строим эпюры Q и M на участке 2 (рис. 6.7).

Пример 5.

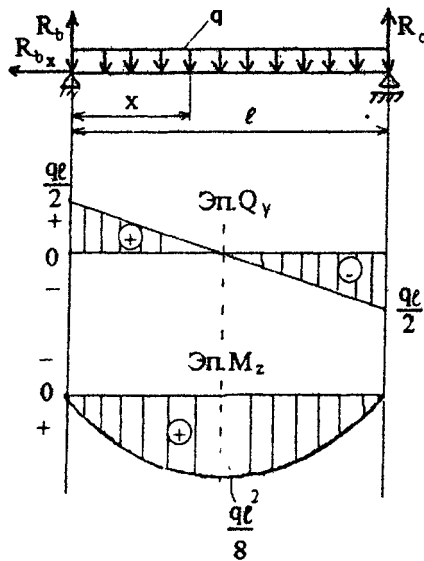


Рис. 6.8

Построим эпюры Q и M для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 6.8).

Из условия симметрии

$$R_b = R_c = \frac{q\ell}{2}; \quad R_{b_x} = 0, \quad \text{так как}$$

нет сил вдоль X .

Запишем выражения Q и M для сечения x , пользуясь известным правилом (пример 4). $Q_x = R_b - qx$ — уравнение прямой линии, при $x = 0$ $Q_x = R_b$,

$$\text{при } x = \ell \quad Q_x = R_b - q\ell = -\frac{q\ell}{2}.$$

Построим эпюру Q .

$$M_z = R_b x - q \frac{x^2}{2} \quad \text{— парабола.}$$

При $x = 0$ $M_z = 0$, при $x = \ell$ $M_z = 0$

Приравняв $\frac{dM_z}{dx}$ к нулю, опре-

делим сечение, в котором $M_z = M_{\max}$.

$$\frac{dM_z}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{q\ell}{2}x - qx^2 \right) = 0 \quad x = \frac{\ell}{2}.$$

Подставим $x = \frac{\ell}{2}$ в выражение M_z , найдем значение $M_{\max}$:

$$M_{\max} = \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - q \cdot \frac{\ell^2}{8} = \frac{q\ell^2}{8}.$$

Построим эпюру M_z .

Из совместного рассмотрения вида нагрузки, действующей на систему эпюр Q и M , можно отметить следующие правила проверки правильности построения эпюр:

- в сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q имеется скачок в направлении действия этой силы и равной этой силе (рис. 6.5, 6.7, 6.8);
- в сечении, где приложена пара сил, на эпюре M имеется скачок на величину и в направлении действия этой пары сил (рис. 6.2, 6.7);
- на участках балок, где приложена равномерно распределенная нагрузка q , поперечная сила Q изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M_z — по закону квадратной параболы (рис. 6.6, 6.8);

- в шарнирах, если не приложена пара сил, изгибающий момент равен нулю (рис. 6.7, 6.8). Дополнительные правила контроля за правильностью построения эпюр, вытекающие из дифференциальных зависимостей между q , Q и M , отмечены в п. 6.2.

6.2. Зависимость между распределенной нагрузкой q , поперечной силой Q и изгибающим моментом M

Между q , Q и M существует зависимость, которая может быть использована при построении эпюр Q и M и при проверке правильности построения эпюр.

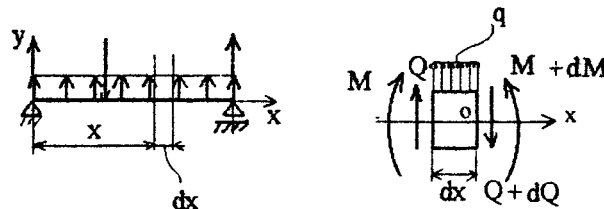


Рис. 6.9

Рассмотрим равновесие элемента балки длиной dx , вырезанного из балки, нагруженной произвольной нагрузкой (рис. 6.9). Так как на участке dx сосредоточенные силы и моменты отсутствуют, то Q и M будут непрерывными функциями от x . Следовательно, на расстоянии $x + dx$ они получают приращения dQ и dM . Составим уравнение равновесия сил, действующих на элемент:

$$\sum Y = Q + qdx - Q - dQ = 0, \quad q = \frac{dQ}{dx}, \quad (6.1)$$

т. е. распределенная нагрузка равна первой производной от поперечной силы по x .

Составим уравнение моментов всех сил относительно центра тяжести правого сечения (точка O):

$$\sum M_O = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - M - dM = 0.$$

Пренебрегая величиной второго порядка малости $q \frac{dx}{2}$, получим

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad (6.2)$$

т. е. поперечная сила в сечении равна первой производной от изгибающего момента по x . Из совместного рассмотрения (6.1) и (6.2) запишем:

$$g(x) = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

Из полученных зависимостей следуют, например, такие правила контроля за правильностью построения эпюр Q и M:

- а) если Q положительна, то M должен возрастать (рис. 6.7, 6.8);
- б) если Q отрицательна, то M – убывает (рис. 6.8);
- в) если Q = 0, M должен иметь экстремальное значение (рис. 6.8);
- г) если на эпюре Q имеется скачок, на эпюре M должны наблюдаться переломы, отражающие изменения первой производной. Из этих данных вытекает еще ряд следствий, с которыми можно ознакомиться по рекомендованной литературе.

Приведем еще примеры построения эпюр Q и M для более сложных систем.

Пример 6.

Определить внутренние силовые факторы для балки, приведенной на рис. 6.10.

Определим опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\sum M_B = -R_A \cdot (a + b) + qa \cdot (b + \frac{a}{2}) + M_0 - F \cdot c = 0$$

$$R_A = \frac{8 \cdot 1,5 + 4 - 10}{2} = 3 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = -qa \frac{a}{2} + M_0 + R_B(a + b) - F(a + b + c) = 0$$

$$R_B = \frac{8 \cdot \frac{1}{2} - 4 + 10 \cdot 3}{2} = 15 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum Y = 3 - 8 + 15 - 10 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции определены верно. Вычислим Q_v и M_z для балки на участках I, II, III.

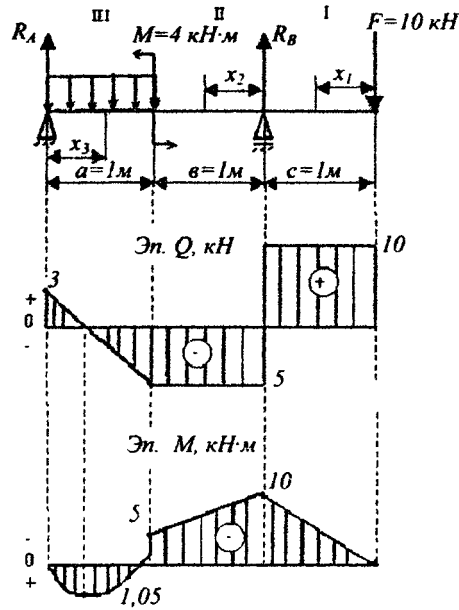


Рис. 6.10.

На участке I $0 \leq x_1 \leq c$ (идем справа).

$$Q = F = 10 \text{ кН},$$

$M = -F \cdot x_1$ — наклонная прямая, при $x = 0$ $M = 0$, при $x = c$

$$M = -F \cdot c = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке II $0 \leq x_2 \leq b$ (идем справа).

$$Q = F - R_B = 10 - 15 = -5 \text{ кН};$$

$$M = -F(c+x_2) + R_B \cdot x_2.$$

При $x_2 = 0$ $M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$,

при $x_2 = b$

$$M = -10 \cdot (1+1) + 15 \cdot 1 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке III $0 \leq x_3 \leq a$ (идем слева).

$Q = R_A - qx_3$ — наклонная прямая.

$$x_3 = 0 \quad Q = R_A = 3 \text{ кН},$$

$$x_3 = a = 1 \quad Q = 3 - 8 \cdot 1 = -5;$$

$$M = R_A \cdot x_3 - qx_3 \cdot \frac{x_3}{2} = R_A x_3 - \frac{qx_3^2}{2},$$

M изменяется по закону квадратной параболы. Для нахождения

экстремального значения M определим первую производную и приравняем ее нулю:

$$M' = R_A - qx_3 = 0,$$

откуда находим $x_3 = \frac{3}{8} \text{ м}$. Следовательно, экстремальное значение M на III участке будет определено подстановкой $x_3 = 3/8 \text{ м}$ в выражение M .

$$M_{\max} = 3 \cdot \frac{3}{8} - 8 \cdot \frac{(3/8)^2}{2} = 1,05 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным на участках I – III значениям Q и M построим эпюры Q и M . (рис. 6.10).

После усвоения метода сечений применительно к прямолинейному брусу, рассмотрим определение внутренних усилий для плоской рамы — конструкции, состоящей из нескольких прямолинейных, расположенных под углом друг к другу, участков. Ось рамы представляет собой ломаную линию, так что каждый прямолинейный участок можно рассматривать как отдельную балку.

Для построения эпюр ординаты откладывают перпендикулярно оси рамы, причем положительные N и Q с внешней стороны рамы, а отрицательные — с внутренней. Эпюры изгибающих моментов условимся строить на сжатых волокнах, как это показано в приведенном ниже примере.

Пример 7.

Построить эпюры N , Q , M для рамы, изображенной на рис. 6.11.

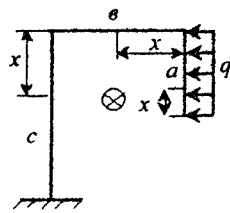


Рис. 6.11

Поскольку эта рама консольная, то удобнее определение внутренних усилий вести со стороны свободного конца рамы. В этом случае не нужно определять реакции. Всего будет три участка: 1-й на длине a , 2-й на длине a и 3-й на длине c .

Выберем точку наблюдения внутри рамы – на рис. 6.11 обозначена кружочком с крестиком. Тогда для каждого участка можно обозначить привычный нам верх и низ, и можно пользоваться принятыми ранее знаками внутренних усилий.

Запишем выражения внутренних усилий по участкам.

1-й участок, $0 \leq x \leq a$. $N=0$, так как нет внешних сил, дающих проекцию на ось x .

$$Q = qx - \text{прямая при } x=0 \quad Q=0. \text{ При } x=a \quad Q=qa.$$

$$M_z = -q \frac{x^2}{2}, \quad x=0 \quad M=0, \quad x=a \quad M_z = -q \frac{a^2}{2}.$$

Экстремум при $x=0$, т.к. $M'_z = -qx \Rightarrow M'_z = 0$ при $x=0$.

Можно построить эпюры внутренних усилий на 1-м участке. Для этого построим три рисунка геометрических осей рамы для построения эпюр соответственно N , Q и M_z (рис. 6.12, а, б, в).

2-й участок, $0 \leq x \leq a$.

$$N = -q \cdot a. \quad Q = 0. \quad M_z = -q \frac{a^2}{2}.$$

Построим эпюры на 2-м участке.

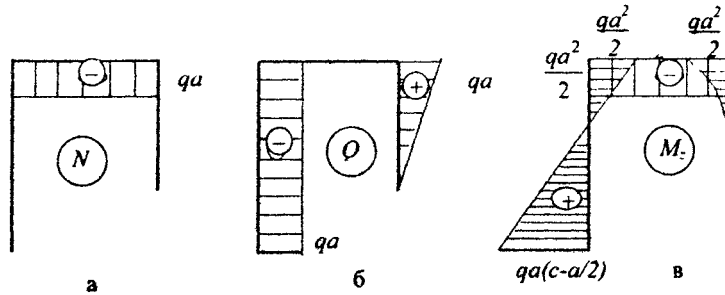


Рис 6.12

3-й участок, $0 \leq x \leq c$.

$$N=0. \quad Q=-qa. \quad M_z = -qa \left(\frac{a}{2} - x \right).$$

$$x=0 \quad M_z = -q \frac{a^2}{2}, \quad x=c. \quad M_z = -qa \left(\frac{a}{2} - c \right) = qa \left(c - \frac{a}{2} \right).$$

Построим эпюры на 3-м участке.

6.3. Нормальные напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим равновесие элемента балки длиной dx , как это было в разделе 5.3. При чистом изгибе отсутствуют поперечные силы, а изгибающий момент уравнивается напряжениями σ (рис. 6.13,а).

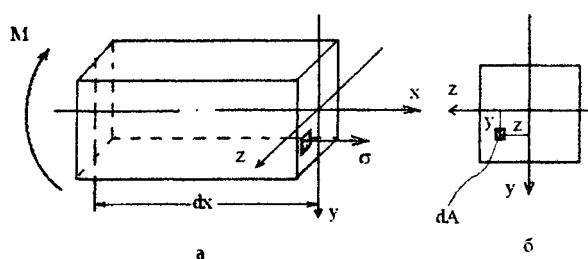


Рис 6.13

рис. 6.13,б) проведем координатные оси y и z : ось y совпадает с силовой плоскостью; ось z перпендикулярна оси y и проходит на произвольной высоте. Позднее ее положение уточним.

ось x является продольной осью

Составим уравнения равновесия. Из всех возможных уравнений равновесия (1.1) останутся только три:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, & \int_A \sigma dA &= 0; \\ \sum M_y &= 0, & \int_A z \sigma dA &= 0; \\ \sum M_z &= 0, & M - \int_A y \sigma dA &= 0. \end{aligned}$$

Остальные уравнения равновесия обращаются в тождества вида $0 \equiv 0$.

Так как закономерности изменения σ по площади сечения неизвестны, рассмотрим особенности деформации элемента. При анализе воспользуемся следующими гипотезами. по ширине сечения, т. е. при $y = \text{const}$, напряжения σ постоянны; продольные волокна не сжимаются, а испытывают только растяжение или сжатие; и, наконец, сечение при де-

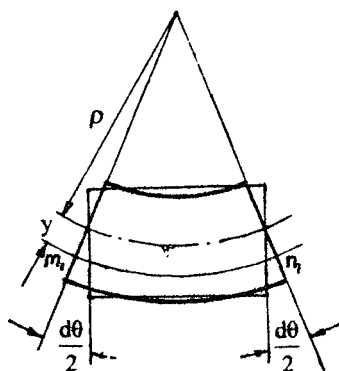


Рис. 6.14

формации не искривляется, т. е. остается плоским.

При деформации элемент длиной dx искривляется, одни волокна растягиваются, другие сжимаются (рис. 6.14). Следовательно, имеется слой, не испытывающий ни растяжения, ни сжатия, и напряжение σ в нем равно нулю. Линия пересечения этого слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной линией* сечения, так как раньше положение оси z в сечении не уточнялось, примем что ось z' совпадает с нейтральной линией сечения. До деформации волокно m_1n_1 равнялось dx , после деформации произошло его удлинение на $y d\theta$, таким образом продольная деформация волокна

$$\varepsilon = \frac{y d\theta}{\rho d\theta},$$

или, сокращая на $d\theta$,

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}.$$

Из физических соображений, по закону Гука, $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

Объединяя два последних выражения, получим

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) подставим в уравнения равновесия $\sum X = 0$:

$$\int_A E \frac{y}{\rho} dA, \quad \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

E и ρ – величины конечные, следовательно, $\int_A y dA = S_z = 0$.

Если статический момент сечения S_z равен нулю, то ось z , совпадающая с нейтральной линией сечения, проходит через центр тяжести. Таким образом, оси y и z – его центральные оси.

Выражение (6.3) подставим в последнее уравнение равновесия:

$$\int_A z E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A zy dA = \frac{E}{\rho} J_{zy} = 0,$$

откуда следует, что $J_{zy} = 0$, следовательно, оси z и y являются главными.

Выражение (6.3) подставим в последнее уравнение равновесия:

$$M - \int_A y E \frac{y}{\rho} dA = 0 \quad \text{или} \quad M = \frac{1}{\rho} E \int_A y^2 dA.$$

Учитывая, что $J_z = \int_A y^2 dA$, получим:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E J_z}. \quad (6.4)$$

Из (6.4) следует: кривизна изогнутой оси балки прямо пропорциональна величине изгибающего момента и обратно пропорциональна жесткости сечения балки при изгибе (EJ_z).

Подставив (6.4) в (6.3), получим:

$$\sigma = \frac{My}{J_z}. \quad (6.5)$$

Приведем эпюру изменения σ по высоте сечений, имеющих различную геометрическую форму: круг, двутавр, прямоугольник (рис. 6.15).

$$\begin{aligned} \text{При } y=0 \quad \sigma=0, \\ \text{при } y = \pm \frac{h}{2} \quad \sigma = \pm \frac{M_z}{J_z} \frac{h}{2} = \sigma_{\max/\min} \end{aligned}$$

Аналогичный вид эпюры σ будет и для любого симметричного относительно оси z сечения.

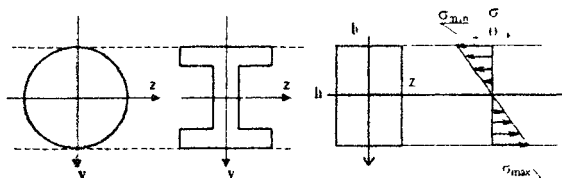


Рис. 6.15

6.4. Касательные напряжения при поперечном изгибе.

Формула Д. И. Журавского

Так как внутренние усилия при поперечном изгибе – изгибающий момент и поперечная сила, то наряду с нормальными напряжениями в этом случае в сечениях возникают и касательные напряжения. При этом формула нормальных напряжений (6.5) справедлива.

Получим формулу для определения τ при поперечном изгибе балки (рис. 6.16). В балке двумя плоскостями 1-1 и 2-2 вырежем элемент длиной dx (рис. 6.16, а). По граням элемента будут действовать M_z и $M_z + dM_z$, а также поперечная сила Q . Предположим, что на участке длиной dx она постоянна. Плоскостью 3-3, проходящей на расстоянии y , отсечем бесконечно малый элемент балки, затененный на рис. 6.16, а. По его граням будут действовать возникающие от M_z и $M_z + dM_z$ нормальные напряжения σ и $\sigma + d\sigma$ и от Q – касательные напряжения τ . На рис. 6.16, б для большей наглядности вырезанный элемент с действующими напряжениями показан в аксонометрии. По го-

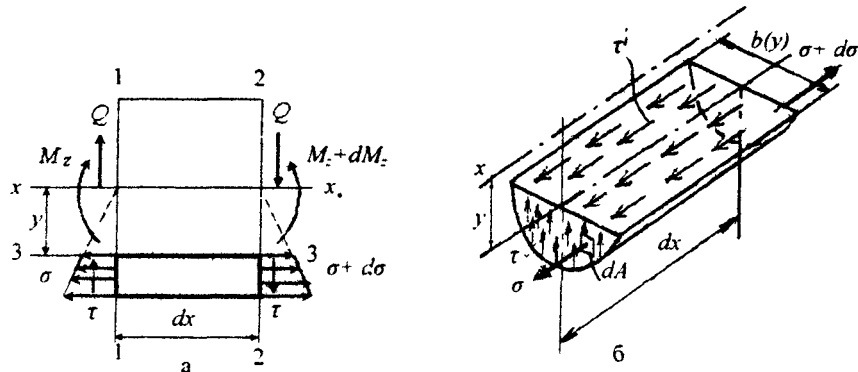


Рис.6.16

горизонтальной грани элемента, площадь которой составляет $b(y) \cdot dx$, согласно закону парности касательных напряжений будут действовать $\tau = \tau$.

Для упрощения вывода формулы примем следующие гипотезы:

- 1 - напряжения τ параллельны силе Q ,
- 2 - напряжения τ одинаковы по ширине и зависят только от координаты y .

Составим уравнение равновесия для рассматриваемого элемента.

$$\sum X = 0,$$

$$-\int_A \sigma dA - \tau b(y) dx + \int_A (\sigma + d\sigma) dA = 0.$$

Раскрывая скобки и сокращая получим:

$$\tau b(y) dx = \int_A d\sigma dA;$$

Нормальные напряжения σ определим по формуле (6.5) $\sigma = \frac{M_y}{J_z}$.

Дифференцируя σ по x и подставляя $\frac{d\sigma}{dx}$ в предыдущую формулу, получим:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\frac{dM_z}{dx} \cdot y}{J_z} = \frac{Qy}{J_z}; \quad \tau = \frac{Q \int y dA}{b(y) J_z},$$

где $Q = \frac{dM_z}{dx}$ и $\int y dA = S_z'$ - статический момент части сечения, расположенной ниже координаты y , т.е. того уровня, на котором определяются касательные напряжения τ . Тогда окончательно формула τ , полученная

Д. И. Журавским, запишется в виде:

$$\tau = \frac{QS_z'}{b(y)J_z}. \quad (6.6)$$

В соответствии с формулой (6.6) касательные напряжения в поперечном сечении зависят от ширины $b(y)$ и статического момента отсеченной части площади поперечного сечения S_z' . В качестве примера построим эпюру τ для прямоугольного сечения (рис. 6.17).

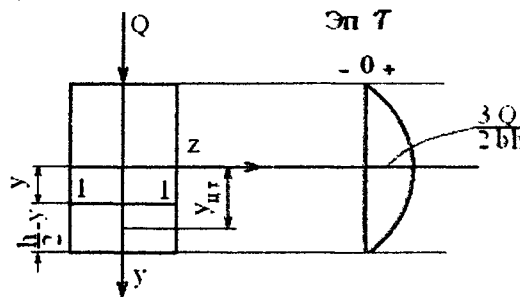


Рис. 6.17

При $y = \pm \frac{h}{2}$ $\tau = 0$,
так как $S_z' = 0$.

Определим τ для уровня y , обозначенного 1-1.

Статический момент площади части сечения, отсеченного линией 1-1 (заштрихована), запишется в виде:

$$S'_{z,1-1} = A_{\text{заштр}} y_{ц\tau} = b \left(\frac{h}{2-y} \right) \left[\left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} = y \right] = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Подставляя в формулу Журавского (6.6) $S'_{z,1-1}$ и $J_z = \frac{bh^3}{12}$, получим

$$\tau = \frac{Q \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)}{b - \frac{bh^3}{12}} = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right). \quad (6.7)$$

Видно, что эпюра является параболой, а $\tau_{\max}$ при $y = 0$ составит:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh}. \quad (6.8)$$

По полученным данным и построим эпюру τ (рис. 6.17).

Для круглого сечения (для справки) $\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}$.

Условие прочности по касательным напряжениям может быть записано в виде:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (6.9)$$

6.5. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям

Чаще всего решающее значение в расчетах на прочность деталей машин и элементов конструкций оказывают максимальные нормальные напряжения, действующие в крайних волокнах балок. Поэтому только в специальных случаях для коротких балок проводят проверку по максимальным касательным напряжениям или по теориям прочности для точек сечения, в которых одновременно действуют значительные по величине нормальные и касательные напряжения. Ниже будет рассмотрен расчет на прочность при изгибе по нормальным допускаемым напряжениям, а для других случаев расчета отсылаем к рекомендуемой литературе.

Наибольшие нормальные напряжения в поперечных сечениях балки не должны превышать допускаемой для данного материала величины. Эта величина принимается равной допускаемым напряжениям $[\sigma]$.

Максимальные нормальные напряжения в соответствии с формулой (6.5) определяются выражением:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{J_z},$$

где y_{max} – расстояние от оси z до крайнего волокна поперечного сечения.

Введем обозначение $\frac{J_z}{y_{max}} = W_z$ – осевой момент сопротивления сечения,

окончательно σ_{max} запишется в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z}. \quad (6.10)$$

Момент сопротивления для прямоугольного сечения со сторонами h и b (рис. 6.15) с учетом (3.7) запишется в виде:

$$W_z = \frac{J_z}{h/2} = \frac{(bh^3)/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}. \quad (6.11)$$

$$\text{Для круга} \quad W_z = W_y = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi D^3}{32}. \quad (6.12)$$

Условие прочности при изгибе выразится неравенством

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (6.13)$$

Из условия прочности (6.13) можно решать следующие задачи: проекторочный расчет (подбор сечения), определение несущей способности балки и проверку прочности.

Проекторочный расчет позволяет определить размеры поперечного сечения заданной формы при заданных нагрузках и свойствах материала. Из условия (6.10) определяется величина необходимого момента сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \quad (6.14)$$

По известной величине W_z находят размеры поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения обычно конструктивно задают отношение $h/b=c$.

Тогда
$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{6c}; \quad h = \sqrt[3]{W_z \cdot 6c}.$$

Для круглого сечения

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}, \quad D = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}}.$$

Для двутавра – по известной величине W_z подбирают ближайший номер из сортамента (табл. 2). При этом перегрузка не должна превышать 5%.

Определение несущей способности балки проводится из условия (6.14)

$$M_{don} = W_z \cdot [\sigma]. \quad (6.15)$$

Затем M_{don} выражается через внешние нагрузки, приложенные к балке, из полученного выражения определяются допускаемые значения нагрузок

Проверка прочности осуществляется путем установления справедливости выражения (6.14) при заданных нагрузках, форме и размерах поперечного сечения и свойствах материала.

Пример 8. Для балки, изображенной на рис. 6.10. (пример 6) подобрать двутавр из расчета на прочность по допускаемым напряжениям. Допускаемые напряжения $[\sigma]=160$ МПа.

Из приведенной на рис. 6.10. эпюры изгибающих моментов находим максимальный изгибающий момент, который составляет 10 кН·м.

Из условия прочности (6.13) определим величину осевого момента со-

противления
$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 6,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 62,5 \text{ см}^3$$

По таблице 2 находим двутавр с близким значением W_z .

Это $\text{I}12$, $W_z' = 58,4 \text{ см}^3$. При этом максимальные напряжения составят

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z'} = \frac{10 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 171 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составляет $\frac{171-160}{160} \cdot 100\% = 6,9\%$, что превышает 5%.

Выберем из табл. 2 следующий больший номер двутавра. $\text{I}14$, $W_z'' = 81,7 \text{ см}^3$.

Максимальные напряжения составят

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z''} = \frac{10 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 122 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составит $\frac{122-160}{160} \cdot 100\% = 23,7\%$.

Окончательно назначаем $\text{I}14$.

6.6. Рациональная форма поперечного сечения при изгибе

Расход материала пропорционален площади поперечного сечения A , а несущая способность балки в соответствии с (6.15) – моменту сопротивления W_z . Поэтому более экономичной будет конструкция, у которой отношение W/A будет иметь возможно большее значение.

Рассмотрим эффективность использования трех рассмотренных ранее сечений: прямоугольного $\frac{h}{b} = 2$, круглого и двутаврового. Произведем подбор сечений для одного и того же значения $M_{max} = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$, материал – сталь, $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

$$\text{Из (6.14)} \quad W = \frac{100 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3.$$

Для прямоугольного сечения

$$h = \sqrt[3]{W_z \cdot 6 \cdot 2} = \sqrt[3]{500 \cdot 12} = 18,2 \text{ см}, \quad b = 9,1 \text{ см}, \quad A = 165 \text{ см}^2.$$

Для круглого сечения

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 500}{3,14}} = 17,2 \text{ см}, \quad A = 232 \text{ см}^2.$$

Для двутавра – по сортаменту I 30a $W_z = 518 \text{ см}^3$, $A = 49,9 \text{ см}^2$ (см. табл.2).

По сравнению с двутавровым сечением расход материала для прямоугольного больше в 4,1 раза, для круглого – в 5,8 раз. Таким образом, наиболее нерациональным является круглое сечение, наиболее эффективным – двутавровое. Причем, расхождение составляет 4 – 6 раз. Круглое сечение является наиболее невыгодным потому, что значительная часть материала попадает в зону, близкую к оси Z , где напряжения малы и материал в значительной части оказывается незагруженным.

6.7. Деформации балок при изгибе

Деформации балок характеризуются двумя параметрами: углом поворота сечения θ и прогибом центра тяжести сечения y (рис. 6.18).

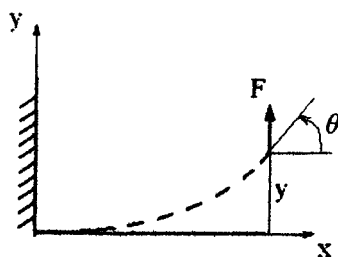


Рис. 6.18

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки может быть получено следующим путем. Кривизна линии имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \approx \pm \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (6.16)$$

В свою очередь $\frac{l}{\rho}$ из выражения (6.4) запишется в виде:

$$\frac{l}{\rho} = \frac{M_z}{EJ}.$$

Из совместного рассмотрения этих уравнений и при принятом правиле знаков θ, y, M следует:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (6.17)$$

После первого интегрирования найдем угол поворота

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EJ} dx + C, \quad (6.18)$$

интегрируя это выражение еще раз, получим прогиб y :

$$y(x) = \int dx \int \frac{M}{EJ} dx + Cx + D, \quad (6.19)$$

где постоянные C и D определяются из начальных условий.

Пример 9.

Определить угол поворота θ_c и прогиб сечения C y_c для консольной балки длиной l и жесткостью при изгибе EJ (рис. 6.19).

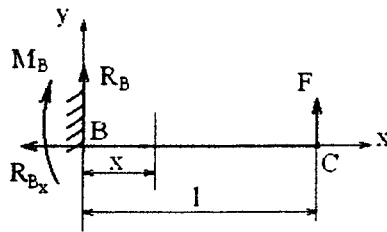


Рис. 6.19

Из условий равновесия находим:

$$\sum Y = F + R_B = 0, \quad R_B = -F.$$

$$\sum M_B = M_B - F\ell = 0, \quad M_B = F\ell.$$

$$\sum X = 0, \quad R_{Bx} = 0.$$

Запишем M для сечения x .

$$M_z = R_{Bx} + M_B = F\ell - Fx.$$

Подставим M_z в (6.18):

$$\theta = \int \frac{(F\ell - Fx) dx}{EJ_z} + C.$$

Постоянную C определим из начальных условий. При $x=0$ $C=\theta_B=0$, так как угол поворота сечения B равен нулю.

$$\theta_c = \int_0^\ell \frac{\left(F\ell - \frac{1}{2}Fx\right) dx}{EJ_z} = \frac{F\ell^2}{2EJ_z}.$$

Для определения y_c обратимся к формуле (6.19).

$$y = \int dx \int \frac{F(\ell - x) dx}{EJ_z} + D.$$

При $x=0$ $y=y_0=D=0$.

$$y_B = \frac{\left(F\ell x - \frac{1}{2} Fx^2 \right) dx}{EJ_z} = \frac{F\ell^3}{3EJ_z}.$$

Итак, при плоском прямом изгибе, когда плоскость действия внешних сил проходит через главную ось сечения, в поперечном сечении возникают внутренние силовые факторы Q (поперечная сила) и M (изгибающий момент). Если $Q=0$, то такой изгиб называют чистым. В поперечном сечении действуют линейно распределенные по высоте нормальные напряжения, имеющие наибольшие и наименьшие значения в крайних волокнах и равные нулю в центре тяжести сечения. Равнодействующей поперечной силы Q являются касательные напряжения τ , распределенные по сечению неравномерно. В подавляющем большинстве случаев в балках большой длины прочность определяется максимальными нормальными напряжениями, т. е. условие прочности записывается в виде $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.

При изгибе ось балки искривляется, и деформации балки оценивают двумя параметрами – прогибом и углом поворота сечения балки, которые определяют из приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки.

7. Сложное сопротивление

7.1. Косой изгиб. Нормальные напряжения. Условие прочности

Раньше были рассмотрены простые виды нагружений: растяжение, сдвиг, кручение, изгиб. На практике встречаются случаи одновременного действия в поперечном сечении нескольких внутренних усилий, например, продольной силы, крутящего и изгибающего моментов. Эти случаи нагружения (деформирования) называют “сложное сопротивление”.

Косой изгиб, как отмечали раньше, такой случай изгиба, когда плоскость действия изгибающего момента не совпадает с главной осью сечения. На рис. 7.1, а консольная балка загружена изгибающим моментом M_0 , плоскость действия которого к оси y под углом α .

Изгибающий момент M_0 раскладывают на составляющие относительно осей y и z :

$$M_z = M_0 \cos \alpha, \quad M_y = M_0 \sin \alpha$$

Нормальные напряжения в точке с координатами z, y определяются суммой напряжений от M_z и M_y :

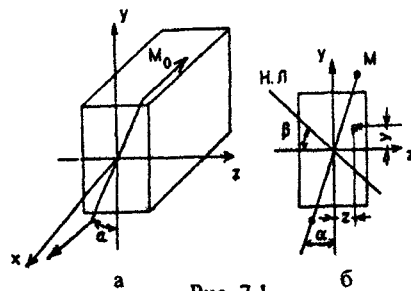


Рис. 7.1

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}, \quad (7.1)$$

$$\text{или} \quad \sigma = M_0 \left(\frac{y}{J_z} \cos \alpha + \frac{z}{J_y} \sin \alpha \right). \quad (7.2)$$

Если приравнять напряжение нулю, то в плоскости сечения получим уравнение нейтральной (нулевой) линии:

$$\frac{y_0}{J_z} \cos \alpha + \frac{z_0}{J_y} \sin \alpha = 0 \quad \text{или} \quad y_0 = -z_0 \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha, \quad (7.3)$$

где y_0 и z_0 – координаты точек нулевой линии y (рис. 7.1, б)

Угол наклона нейтральной линии определяется формулой

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha, \quad (7.4)$$

где β – угол между нулевой линией и осью z $\operatorname{tg} \beta = y_0/z_0$.

Знак минус в (7.1) указывает на то, что линия нагрузки и нулевая линия лежат в разных четвертях. При $J_z \neq J_y$ нейтральная линия не перпендикулярна плоскости действия M_0 . Наибольшие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. Для поперечного сечения с выступающими углами (например, прямоугольного), наибольшие напряжения можно вычислять по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},$$

где W_z и W_y – моменты сопротивления сечения.

В этом случае условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (7.5)$$

Для других сечений необходимо определить координаты $z_{\max}$ и $y_{\max}$ наиболее удаленной от нулевой линии точки сечения, найти $\sigma_{\max}$ и подставить в условие прочности (7.5).

7.2. Внецентренное растяжение и сжатие

Если продольная сила, параллельная продольной оси, не совпадает с геометрической осью стержня, то

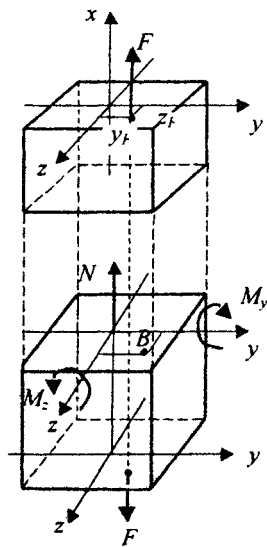


Рис. 7.2

возникает внецентренное растяжение (сжатие).

Пусть такая сила F приложена к торцу стержня в точке сечения с координатами z_F, y_F . Внутренние усилия в любом сечении стержня показаны на рис. 7.2 и равны:

$$N=F, \quad M_z = F y_F, \quad M_y = F z_F.$$

Используя основные формулы для напряжений при простых видах деформирования и принцип независимости действия сил, получим формулу напряжений σ при внецентренном растяжении:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F \cdot y}{J_z} + \frac{F \cdot z_F \cdot z}{J_y}. \quad (7.6)$$

Приравняв (7.6) нулю, получим уравнение нулевой линии

$$\frac{1}{A} + \frac{y_F y}{J_z} + \frac{z_F z}{J_y} = 0. \quad (7.7)$$

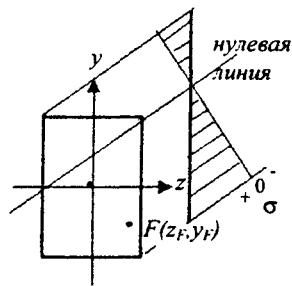


Рис. 7.3

Из формулы (7.7) следует, что нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения и лежит с противоположной стороны центра тяжести по отношению к точке приложения силы (рис. 7.3)

Чем дальше от нейтральной линии находится точка сечения, тем больше напряжения (рис. 7.3.). А условие прочности запишется в виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (7.8)$$

Для сечения с выступающими углами $\sigma_{\max}$ будут определяться по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}.$$

Для других сечений при определении $\sigma_{\max}$ в формулу (7.6) следует подставить координаты точки y и z , наиболее удаленной от нулевой линии.

7.3. Кручение с изгибом

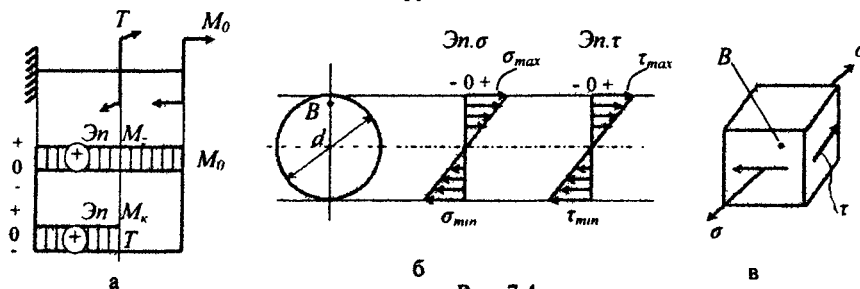


Рис. 7.4

В вале круглого сплошного сечения действуют одновременно изгибающий и крутящий моменты (рис. 7.4, а)

Эпюры распределения напряжений по поперечному сечению приведены на рис. 7.4, б.

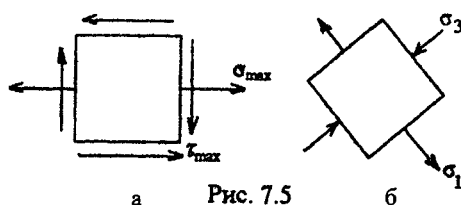
При изгибе максимальные напряжения возникают в верхних и нижних волокнах,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z, max}}{W_p},$$

при кручении – по контуру сечения действуют максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{M_{k, max}}{W_p}.$$

Компоненты напряжений по площадкам элемента вокруг наиболее нагруженной точки В показаны на рис. 7.4, б. На рис. 7.5, а приведена плоская картина компонентов напряжений по граням элемента общего положения,



а Рис. 7.5 б

главные напряжения определим по известной формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Положение главных площадок и направление главных напряжений показаны на рис. 7.5, б.

Прочность при сложном напряженном состоянии необходимо проверять по теориям прочности. Так, по третьей теории прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставим значения σ_1 и σ_3 , условие прочности примет вид:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.9)$$

Подставляя значения σ и τ , получим:

$$\frac{\sqrt{M_z^2 + M_k^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (7.10)$$

При сложном сопротивлении в поперечном сечении стержня возникает несколько внутренних силовых факторов. В общем случае их может быть шесть:

N , Q_x , Q_z , M_x , M_y и M_z . Определение напряжений от каждого внутреннего усилия определяется по формулам для напряжений при простых видах деформирования. Пользуясь принципом независимости действия сил, можно определить нормальные напряжения в общем случае сложного сопротивления. Задача определения касательных напряжений в поперечном сечении стержня требует дополнительного анализа. Полное касательное напряжение на площадке можно определить как геометрическую сумму. При сложном напряженном состоянии расчет на прочность проводится по теориям прочности

8. Динамическое действие нагрузки

8.1. Расчет на прочность при равноускоренном движении

В предыдущих главах рассмотрено действие статических нагрузок, ускорения пренебрежимо малы. Если приложена динамическая нагрузка, возникают ускорения и, соответственно силы инерции, вызывающие дополнительные напряжения. Метод расчета в рассматриваемом случае основан на принципе Даламбера: движущееся с ускорением тело рассматривается находящимся в состоянии мгновенного равновесия, если дополнительно приложить к нему силы инерции. Предположим, что тело G поднимают равноускоренно с ускорением a на стальном тросе (рис.8.1). Определим напряжения в тросе, если его площадь поперечного сечения A . На рис.8.1, а показана расчетная схема при статической нагрузке, а на рис.8.1, б – при равноускоренном движении. Дополнительно к силе веса G добавляется сила инерции F_u :

Рис. 8.1

$$F_u = \frac{a}{g} G,$$

так что условие равновесия системы запишется в виде:

$$N_d = G + \frac{a}{g} G = G \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (8.1)$$

Динамические напряжения

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{G}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_{ст} K_d, \quad (8.2)$$

где $\sigma_{ст}$ – напряжения от статического действия нагрузок, K_d – динамический коэффициент.

Условие прочности примет вид:

$$\sigma_{d, \max} = K_d \sigma_{ст \max} < [\sigma]. \quad (8.3)$$

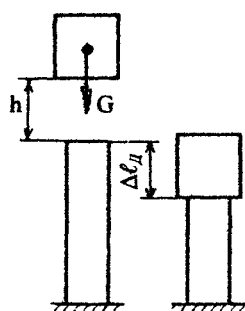


Рис. 8.2

8.2. Расчет на удар

Рассмотрим случай продольного удара тела весом G при падении с высоты h (рис.8.2). Скорость падения при ударе

$$v = \sqrt{2gh},$$

откуда

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

При дальнейшем анализе удара примем следующие допущения: а) при ударе возникают только упругие деформации; б) ударяющее тело не отскакивает от ударяемого, а перемещаются вместе; в) масса ударяющего тела много больше массы ударяемого.

Под действием удара ударяемое тело деформируется на $\Delta \ell_d$, так что величина полной работы падающего тела

$$P = G(h + \Delta \ell_d). \quad (8.4)$$

Потенциальная энергия деформации при сжатии

$$U = \frac{G_d \Delta \ell_d}{2} = \frac{\Delta \ell_d^2 EA}{2l} \quad (8.5)$$

Приравняв U и P , получим $\Delta \ell_d^2 E - \frac{G2\ell}{EA} \Delta \ell_d - \frac{G2\ell}{EA} h = 0$.

Учитывая, что $\Delta \ell_{ст} = \frac{G\ell}{EA}$, получим

$$\Delta \ell_d^2 - 2\Delta \ell_{ст} \Delta \ell_d - 2\Delta \ell_{ст} h = 0 \quad (8.6)$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$\Delta \ell_d = \Delta \ell_{ст} \pm \sqrt{\Delta \ell_{ст}^2 - 2\Delta \ell_{ст} h} = 0. \quad (8.7)$$

Решение со знаком “минус” противоречит физическому смыслу, поэтому окончательно имеем:

$$\Delta \ell_d = \Delta \ell_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta \ell_{ст}}} \right) = \Delta \ell_{ст} K_d, \quad (8.8)$$

где K_d – динамический коэффициент.

Учитывая линейную связь между деформациями и напряжениями, запишем

$$\sigma_d = \sigma_{ст} K_d . \quad (8.9)$$

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_d \leq [\sigma] . \quad (8.10)$$

8.3. Прочность при циклически изменяющихся напряжениях

К динамическим нагрузкам можно отнести и периодически повторяющиеся нагрузки, действующие на элементы конструкций, такие как валы, клапанные пружины двигателей, оси железнодорожных вагонов, лопатки турбин, гребные винты и т. п. Как показывает статистика, более 80% поломок таких изделий происходит *внезапно, при напряжениях* меньших предела текучести материала. Такого рода изломы, вызванные переменными напряжениями, называют усталостными, а потерю прочности металла, связанную с действиями переменных нагрузок, усталостью материала. Способность материала сопротивляться многократно повторяющимся нагрузкам называют выносливостью.

Усталостное разрушение проявляется в постепенном накоплении повреждений, приводящих к изменению свойств, возникновению трещин, постепенному их развитию, заканчивающемуся мгновенным доломом при возрастании в ослабленном трещиной сечении напряжений до критической величины. Поэтому в изломах усталости наблюдают две различные зоны: наружную, с гладкой блестящей поверхностью и внутреннюю, шероховатую. Первая связана с зарождением и постепенным развитием усталостной трещины от циклического действия нагрузки. Вследствие контактного взаимодействия ответных поверхностей подрастающей трещины и образуется в изломе блестящая, притертая зона.

Совокупность всех значений напряжений за один период их изменения называют *циклом напряжений*.

Покажем основные параметры цикла (рис.8.3), напряжения в котором меняются от $\sigma_{\max}$ до $\sigma_{\min}$. Здесь T -период цикла. Заметим, что форма кривой $\sigma(t)$ на усталость материала особой роли не играет.

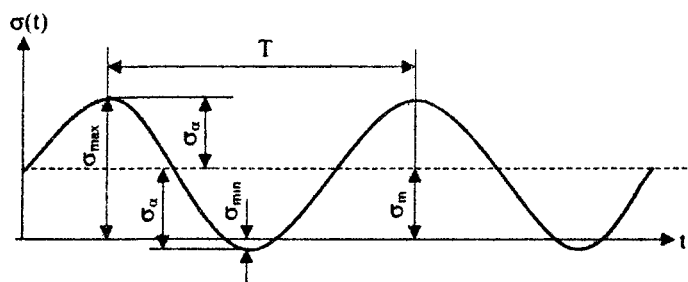


Рис. 8.3

Алгебраическая полусумма максимального $\sigma_{\max}$ и минимального $\sigma_{\min}$ напряжений цикла называется средним напряжением σ_m

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad (8.11)$$

а полуразность – амплитудой цикла σ_a .

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (8.12)$$

Отношение

$$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (8.13)$$

называют коэффициентом асимметрии цикла напряжений

Если $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$, то цикл называют симметричным ($R_\sigma = -1$),

если $\sigma_{\min} = 0$, – отнулевым ($R_\sigma = 0$) (рис.8.4).

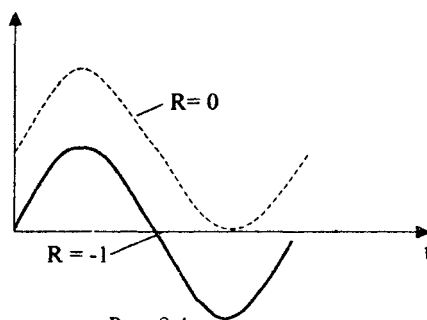


Рис 8.4

Наибольшее значение максимального напряжения цикла $\sigma_{\max}$, которое не вызывает разрушения испытываемого на выносливость образца из данного материала при неограниченно большом числе циклов, называется *пределом выносливости*. Его обозначают σ_R , где R – коэффициент асимметрии цикла. При симметричном цикле предел выносливости обозначается σ_{-1} , при отнулевом – σ_0 .

Для опытного определения предела выносливости используют специальные испытательные машины. Наиболее распространены испытания на изгиб с вращением. Образец нагружают чистым изгибом и вращают. Схема такого нагружения приведена на рис.8.5.

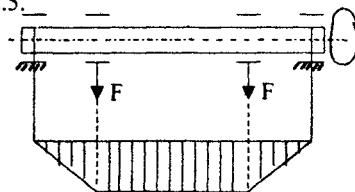


Рис.8.5

Образец устанавливается на подшипниках, а нагрузка на образец передается через подвеску, прикрепленную к образцу также на подшипниках. За один оборот образца напряжения в каждой точке поперечного сечения испытывают один симметричный цикл нагружения.

Величина σ_{max} (σ_{min}) определяется нагрузкой F . Чем больше F , т. е. чем больше σ_{max} , тем меньше число циклов до разрушения выдержит образец, и наоборот.

Для определения предела выносливости испытываемого материала изготавливают не менее десяти одинаковых образцов. Задаваясь различными значениями σ_{max} , определяют число циклов N , при которых разрушается образец. По результатам испытаний строят кривую выносливости $\sigma_{max} = f(N)$. Эту кривую обычно строят в полулогарифмических координатах (рис. 8.6).



Рис. 8.6

Для стальных образцов при нормальной температуре установлено, что если образец не разрушился до 10^7 циклов, то он не разрушится и при более длительном испытании. Это число циклов, равное десяти миллионам, называют базой испытаний. Для цветных металлов не удается установить такое число циклов, после которого образец бы в дальнейшем не разрушился. Для таких металлов база испытаний увеличивается до 10^8 циклов. В нашем случае (рис. 8.6) при усталостном испытании стальных образцов образцы 6, 7 и 9 не разрушились на базе испытаний (10^7 циклов) и показаны стрелками. В результате устанавливается наибольшее напряжение, при котором не происходит разрушение образца. Это напряжение и является пределом выносливости при симметричном цикле σ_{-1} .

Обычно для сталей $\sigma_{-1} \approx (0,4 - 0,5) \sigma_s$, для углеродистых — ближе к 0,4, для легированных — ближе к 0,5. Для цветных металлов $\sigma_{-1} \approx (0,25 - 0,5) \sigma_s$.

Определение предела выносливости при несимметричных циклах ($R \neq -1$) делает задачу экспериментально более сложной.

На величину предела выносливости детали при заданной характеристике цикла влияет целый ряд факторов: геометрическая форма, состояние поверхности детали, размеры, среда, температура, частота нагружения и др. Кратко рассмотрим основные из них.

Концентрация напряжений. В местах резкого изменения геометрической формы детали (выточки, острые углы, шпоночные канавки, галтели и т. д.) возникают местные повышенные напряжения, что облегчает зарождение трещин и снижает предел выносливости. Уменьшение предела выносливости учитывают введением эффективного коэффициента концентрации напряжений K_σ :

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,K}}, \quad (8.14)$$

где σ_{-1} – предел выносливости стандартного образца,

$\sigma_{-1,K}$ – предел выносливости образца тех же размеров, но с концентратором напряжений.

Влияние размеров (масштабный фактор). С ростом абсолютных размеров детали предел выносливости понижается. Этот эффект носит название масштабного фактора. Влияние размеров учитывают отношением предела выносливости детали заданных размеров $\sigma_{-1,d}$ к пределу выносливости лабораторного образца ($d = 7 - 10$ мм) и называют эту величину коэффициентом масштаба β_M ($\beta_M < 1$):

$$\beta_M = \frac{\sigma_{-1,M}}{\sigma_{-1}}. \quad (8.15)$$

Качество поверхности детали. В большинстве случаев усталостное разрушение (зарождение трещин) начинается с поверхности. Следовательно, условия, облегчающие или затрудняющие образование трещин, оказывают влияния на величину предела выносливости детали. Влияние состояния поверхности на выносливость оценивается коэффициентом поверхностной чувствительности β_H , который равен отношению предела выносливости испытуемого образца с определенной обработкой поверхности $\sigma_{-1,H}$ к пределу выносливости полированного образца σ_{-1} , т. е.:

$$\beta_H = \frac{\sigma_{-1,H}}{\sigma_{-1}}. \quad (8.16)$$

В большинстве случаев $\beta_H < 1$. Упрочняющие обработки, например, поверхностное пластическое деформирование (ППД), наоборот, увеличивают предел выносливости.

С учетом рассмотренных факторов предел выносливости детали можно записать в виде

$$\sigma_{-1,d} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \cdot \beta_M \cdot \beta_H}, \quad (8.17)$$

а условие циклической прочности при симметричном цикле – неравенством

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \cdot \varepsilon_M \cdot \varepsilon_D} \geq [n].$$

Здесь n и $[n]$ – соответственно фактический и нормативный коэффициенты запаса. Последний в зависимости от условий эксплуатации, назначения конструкции, качества обслуживания и других факторов назначается в пределах от 1,3 до 6,0.

Быстро изменяющиеся нагрузки вызывают перемещение тела с ускорениями, сопровождающимися появлением сил инерции. Вызываемые в этом случае нагрузками перемещения, деформации и напряжения называют динамическими. Эти параметры могут быть найдены путем увеличения перемещений, деформаций и напряжений, возникающих от статического действия нагрузки, пропорционально динамическому коэффициенту K_D .

Циклически повторяющиеся нагрузки сопровождаются накоплением повреждений, приводящих к необратимому изменению механических свойств и разрушению детали при напряжениях, меньших предела текучести. Характеристикой свойств материала сопротивляться усталостному разрушению является предел выносливости. В реальной детали на ее величину влияют концентраторы напряжений, размеры и состояние поверхности детали, среда, температура и тому подобное, что необходимо учитывать при оценке усталостной прочности.

9. Выполнение контрольной работы

9.1. Рекомендации к выполнению контрольной работы

- Приступать к выполнению задания необходимо лишь после изучения соответствующего учебного материала.
- Студенты заочного отделения выполняют работу в тетради чернилами, разборчивым подчерком, с полями 4 см для замечаний рецензента. Требования по оформлению работы студентам вечернего отделения доводятся на практических занятиях.
- На титульном листе контрольной работы следует четко написать: наименование министерства, вуза, кафедры, номер контрольной работы и ее название, шифр (номер варианта), номер группы, фамилию и. о. Студенты заочного обучения дополнительно указывают дату отсылки работы и точный почтовый адрес.
- Данные для решения задачи следует брать из таблицы 3 в соответствии со своим личным номером (шифром), определяемым двумя последними цифрами (номера зачетной книжки), причем предпоследнюю четную принимать равной 0, а нечетную – 1. Например: 123456 – вариант 16, 123446 – вариант 6. Номер варианта студентам безотрывной формы обучения сообщается преподавателем на практических занятиях.
- Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, составить аккуратно схему в масштабе и указать на ней величины, необходимые для расчета.
- Решение должно сопровождаться краткими и грамотными, без сокращения слов, пояснениями и чертежами, ссылкой на чертежи и использованную литературу. Необходимо избегать механического пересказа учебника.
- Все вычисления следует проводить с обоснованной точностью, соответствующей практической целесообразности. Чаще всего в прочностных расчетах достаточно в числовых ответах иметь три значащих цифры.
- Необходимо указывать размерность всех величин, получаемых в результате вычислений.
- После выполнения контрольная работа предъявляется для проверки и защиты. При защите студент должен уметь решать задачу по соответствующему разделу курса. Работа должна выполняться в установленные графиком сроки и регистрироваться в деканате не позднее недели до начала зачетно-экзаменационной сессии.
- В зависимости от специальности и объема курса преподаватель может варьировать количество контрольных задач.

9.2. Задания к контрольной работе

9.2.1. Определение внутренних силовых факторов.

Задачи 1-5. Для заданных расчетных схем (рис. 9.1 - 9.5), выбранных в соответствии с шифром, определить внутренние силовые факторы: записать их аналитические выражения по участкам и построить эпюры. Данные расчета взять из таблицы. *Рабочий вариант полученных эпюр сохранить, так как они потребуются при выполнении расчетов на прочность*

9.2.2. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям.

Задача № 6. По данным внутренних усилий задач 1 и 2 (приведя полученные ранее расчетные схемы и эпюры внутренних усилий) определить площадь поперечного сечения A (рис. 9.1) и диаметры стержней. (рис. 9.2, $d/D=0,7$).

Допускаемое напряжение для материала стержней $[\sigma]=160$ МПа, $[\tau]=100$ МПа.

Задача № 7. Подобрать размеры поперечного сечения балки (рис. 9.3), если допускаемое напряжение $[\sigma]=140$ МПа. Форма поперечного сечения для схемы рис. 9.3. а – прямоугольная с соотношением высоты h к ширине b , равной двум; для рис. 9.3. б – двутавр.

9.2.3. Анализ напряженного и деформированного состояний

Задача № 8. Стальной кубик (рис. 9.6) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние. Определить:

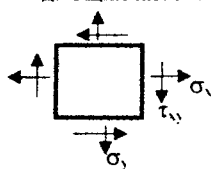
- 
- а) главные напряжения и направление главных площадок;
 - б) максимальные касательные напряжения;
 - в) относительные деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z ;
 - г) относительное изменение объема;
 - д) удельную потенциальную энергию упругих деформаций. E стали – $2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu=0,3$.

Рис. 9.6

9.2.4. Расчеты на прочность при сложном сопротивлении

Задача № 9. Для плоской рамы (рис.9.4) подобрать круглое поперечное сечение. Построим эпюры напряжений в опасном сечении. Допускаемое напряжение материала $[\sigma]=180$ МПа.

Задача № 10. Для схемы (рис.9.5) провести анализ напряженного состояния в опасной точке сечения, определить величину и направление главных напряжений, рассчитать диаметр сплошного круглого стержня по теории максимальных касательных напряжений. Построим эпюры напряжений в опасном сечении. Допускаемые напряжения материала $[\sigma]=200$ МПа. Длины участков b и c равны a .

Перед выполнением работы ознакомиться с рекомендациями к выполнению контрольных работ

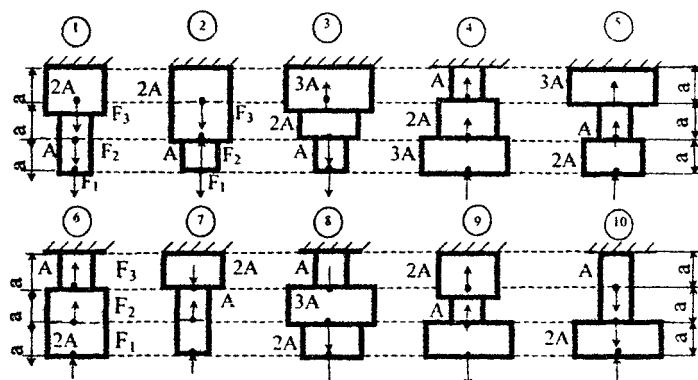


Рис.9.1

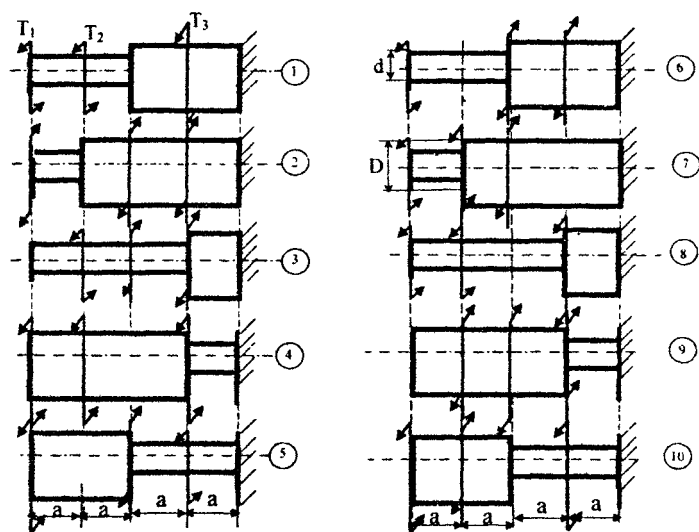


Рис.9.2

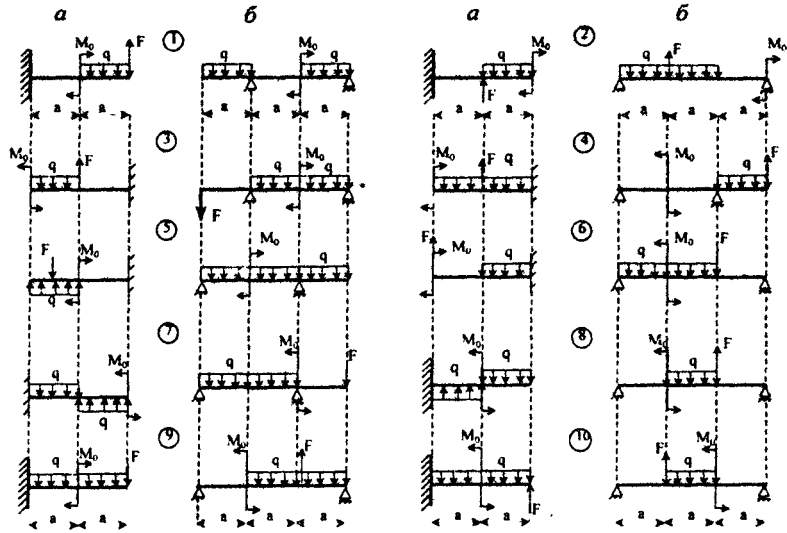


Рис.9.3

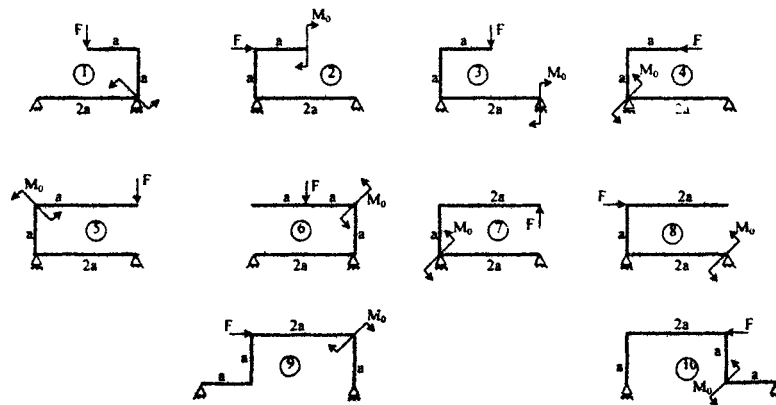


Рис.9.4

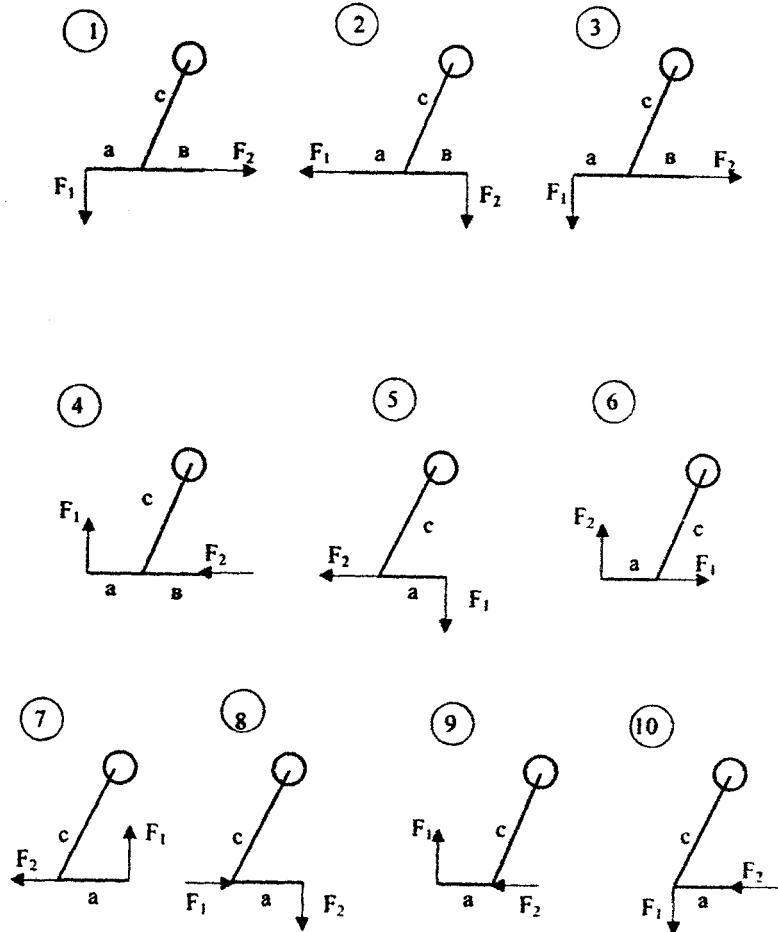
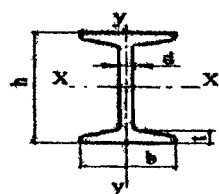


Рис. 9.5



Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-72)

Таблица 2

Обозначения:

h – высота балки
b – ширина полки
d – толщина стенки
t – средняя толщина полки

J – момент инерции
W – момент сопротивления
i – радиус инерции
S – статический момент полусечения

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A, см ²	J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	J _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	Масса 1м, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,5	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50	2,8	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Таблица 3

№ вари- анта	Номер схемы на рисунке	Силы, кН			Моменты сил, кН·м				Распреде- ленная нагрузка $q, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	Напряжения, МПа			Длина а, м
		F	F ₁	F ₂	T ₁	T ₂	T ₃	M ₀		σ_x	σ_y	τ_{xy}	
1	1	20	30	40	20	30	40	30	40	100	500	300	1,0
2	2	30	20	40	30	20	40	20	20	200	400	200	1,1
3	3	40	30	20	40	30	20	10	30	300	300	100	1,2
4	4	10	30	20	10	20	30	20	10	400	200	400	1,3
5	5	30	10	20	20	30	40	30	10	500	100	500	1,4
6	6	20	30	10	20	40	30	10	20	-500	100	300	1,5
7	7	10	20	30	30	10	20	20	30	-400	200	400	1,4
8	8	30	20	10	40	20	10	30	40	-300	300	200	1,3
9	9	20	10	30	10	30	40	20	30	-200	400	100	1,2
10	10	10	30	20	10	40	30	10	20	-100	500	500	1,1
11	6	20	20	10	20	30	20	20	10	100	-400	200	1,0
12	7	30	10	30	30	20	10	30	20	200	-500	300	1,1
13	8	40	20	10	40	10	20	20	30	300	-300	400	1,2
14	9	30	30	10	30	20	30	30	40	400	-200	500	1,3
15	10	20	30	20	20	30	40	10	30	500	-100	100	1,4
16	5	10	20	30	10	40	30	20	20	100	300	-500	1,5
17	4	20	10	40	20	30	20	10	10	200	400	-400	1,4
18	3	30	20	30	30	20	10	20	20	300	500	-300	1,3
19	2	40	10	20	40	10	20	30	30	400	200	-200	1,2
20	1	30	30	10	30	10	30	40	40	500	100	-100	1,1
21	5	20	10	40	20	20	40	10	10	500	-200	300	1,0
22	6	10	20	30	10	30	30	20	20	400	-300	200	1,1
23	4	20	30	20	20	40	20	30	30	300	200	-400	1,2
24	8	30	40	10	30	20	10	40	40	200	100	-300	1,3
25	7	40	10	20	40	30	20	20	20	100	500	-200	1,4

Список рекомендованной литературы

1. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1975. – 754 с.
2. Беляев Н. Н. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
3. Сопротивление материалов/ Г. С. Писаренко и др. – Киев Виша школа, 1984. – 704 с.
4. Степин П. А. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1983. – 423 с.
5. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров и др. – М.: Наука и техника, 1988. – 464 с.

Оглавление

Введение	3
1. Основные положения	
1.1. Общие определения и допущения	4
1.2. Внутренние силовые факторы. Метод сечений	5
1.3. Понятие о напряжениях и деформациях	7
2. Растяжение и сжатие	
2.1. Внутренние усилия, напряжения, деформации	9
2.2. Механические свойства материалов	12
2.3. Расчеты на прочность и жесткость	13
3. Основы теории напряженного и деформированного состояния. Теории прочности	
3.1. Напряжения по наклонным площадкам при растяжении	14
3.2. Напряженное состояние в точке. Главные напряжения. Виды напряженного состояния	15
3.3. Напряжения по наклонным площадкам при плоском напряженном состоянии	16
3.4. Определение главных напряжений и положения главных площадок	17
3.5. Зависимости между напряжениями и деформациями в общем случае нагружения (обобщенный закон Гука)	18
3.6. Изменение объема при деформации	18
3.7. Работа внешних сил и потенциальная энергия упругой деформации	19
4. Геометрические характеристики плоских сечений	
4.1. Статические моменты и моменты инерции	19
4.2. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте координатных осей	20
4.3. Главные оси инерции и главные моменты инерции	22
5. Сдвиг. Кручение	
5.1. Чистый сдвиг	23

5.2. Внутренние усилия при кручении Напряжения при кручении сплошного круглого вала.....	24
5.3. Анализ напряженного состояния при кручении.....	26
5.4. Расчет на прочность при кручении	26
5.5. Закон Гука при кручении и расчет на жесткость.....	27
6. Плоский изгиб	
6.1. Основные понятия. Внутренние усилия: поперечная сила и изгибающий момент.....	28
6.2. Зависимость между распределенной нагрузкой q , поперечной силой Q и изгибающим моментом M	33
6.3. Нормальные напряжения при чистом изгибе.....	37
6.4. Касательные напряжения при поперечном изгибе. Формула Д. И. Журавского.....	39
6.5. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям.....	42
6.6. Рациональная форма поперечного сечения при изгибе.....	44
6.7. Деформации балок при изгибе.....	44
7. Сложное сопротивление	
7.1. Косой изгиб. Нормальные напряжения. Условие прочности.....	46
7.2. Внецентренное растяжение и сжатие.....	47
7.3. Кручение с изгибом.....	48
8. Динамическое действие нагрузки	
8.1. Расчет на прочность при равноускоренном движении.....	49
8.2. Расчет на удар.....	51
8.3. Прочность при циклически изменяющихся напряжениях.....	52
9. Выполнение контрольной работы	
9.1. Рекомендации к выполнению контрольной работы.....	57
9.2. Задания к контрольной работе.....	58
9.2.1. Определение внутренних силовых факторов	58
9.2.2. Расчет на прочность по допускаемым напряжениям.....	58
9.2.3. Анализ напряженного и деформированного состояний.....	58
9.2.4. Расчеты на прочность при сложном сопротивлении.....	58
Список рекомендованной литературы.....	64