

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

Методические указания



Волгоград
2009

УДК 519.85(075)

Рецензент

канд. техн. наук *О. А. Авдеюк*

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Индивидуальные задания по математическому моделированию : метод. указания / сост. О. Ю. Соловьёва, И. А. Тарасова, А. Б. Симонов ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2009. – 24 с.

Содержат сведения справочного характера, примеры пошагового решения задач математического моделирования и задания для индивидуальных работ. Написаны с учетом опыта преподавания предметов «Прикладная математика» и «Математические модели и методы в экономике» на кафедрах ПМ и ММиОП в ВолгГТУ.

Предназначены для студентов всех форм обучения и специальностей, изучающих данный раздел современной математики.

© Волгоградский государственный
технический университет, 2009

Введение

Данные методические указания являются продолжением изданного ранее методического пособия «Математическое моделирование»¹, дополняющие его списком индивидуальных заданий (3 задачи по 25 вариантов). Указания содержат материалы справочного характера и примеры выполнения ресурсной и транспортной задачи (1-3 раздел), а также индивидуальные задания (4 раздел). Другие примеры решения задач (включая задачу сетевого программирования), более подробное изложение теоретического материала и использование пакетов прикладных программ можно найти в указанном выше методическом пособии.

Методические указания могут быть использованы студентами при изучении дисциплин «прикладная математика», «математические модели и методы в экономике», «пассажирские и грузовые перевозки» и при выполнении индивидуальных контрольных заданий.

1. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Пусть требуется найти $\max Z$,

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (1)$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1..n),$$

где a_{ij}, c_i, b_i - постоянные числа ($b_i > 0, m < n$).

Введя векторы:

1. Борзунова Т.Л., Барыкин М.П., Данилов Е.А., Соловьева О.Ю. Математическое моделирование: Учебное пособие. – ВолгГТУ.- Волгоград, 2008.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \dots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

можно записать систему (2) в векторной форме :

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m + x_{m+1} A_{m+1} + \dots + x_n A_n = A_0. \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что справедливо равенство:

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots + b_m A_m = A_0,$$

а это означает, что $X_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ является решением системы (2) или начальным опорным планом задачи. Этот план определяется системой базисных векторов $A_1, A_2, \dots, A_m$ m -мерного пространства. Каждый вектор A_j может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этого базиса: $A_j = \sum_{i=1}^m x_{ij} A_i$ ($j=0..n$).

Положим $Z_j = C_0 A_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}$, где $C_0 = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ - ценовой вектор базиса и $\Delta_j = Z_j - c_j$ (x_{ij} - компоненты вектора A_j в данном базисе).

Оптимальность опорного плана и последующие шаги решения задачи определяются следующими теоремами:

Теорема 1. Опорный план $X=(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ задачи линейного программирования (1)-(2) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для всех j ($j=1, \dots, n$).

Теорема 2. Если для некоторого $j=k$ $\Delta_j < 0$ и среди чисел a_{ik} ($i=1, \dots, m$) нет положительных чисел, то целевая функция задачи не ограничена на множестве ее планов.

Теорема 3. Если опорный план X задачи не вырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} \leq 0$), то существует опорный план X_1 такой, что $Z(X_1) > Z(X)$.

Исходные данные и процесс вычисления (переход к новому опорному плану) удобно записывать в табл. 1

Таблица 1

i	базис	C_6	A_0	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n
				A_1	A_2	...	A_k	...	A_n
1	E_1	C_{10}	b_{10}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	E_2	C_{20}	b_{20}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	E_m	C_{m0}	b_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
m+1			Z_0	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n

Базисный вектор $E_i (i=1, \dots, m)$ совпадает с A_s , если $a_{is} = 1$, а все остальные компоненты равны нулю. Соответствующий коэффициент c_s при x_s целевой функции записан в C_6 . Значения $\Delta_j = Z_j - c_j = A_j C_6 - c_j$ ($j=0, \dots, n$) записаны в $(m+1)$ -й строке. В столбце A_0 записаны свободные члены b_i системы (8) в порядке, соответствующем каждому базисному вектору. Компоненты вектора A_0 и составляют опорный план ($b_i > 0$); в $(m+1)$ -й строке этого столбца получаем значение целевой функции $Z_0 = C_6 A_0$ при этом плане.

Приведем алгоритм решения задачи симплекс-методом.

1. Находят опорный план $X_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$.

2. Составляют симплекс-таблицу типа 1.

3. Выясняют, имеется ли хотя бы одно $\Delta_j < 0$. Если нет таких чисел, то найденный опорный план будет оптимальным. В противном случае устанавливают либо неразрешимость задачи (все компоненты вектора A_j неположительны), либо переходят к новому опорному плану.

4. В новый план включают вектор A_s , для которого $\min_j (\Delta_j \Theta_0)$, $\Delta_j < 0$, а $\Theta_0 = b_k / a_{ks} = \min_i (b_i / a_{is})$, $a_{is} > 0$. Элемент a_{ks} является разрешающим, который и определяет базисный вектор E_k , подлежащий замене вектором A_s .

5. В новом базисе таблица пересчитывается так:

а) все элементы k -ой строки, начиная со столбца A_0 , делятся на a_{ks} ;

б) все элементы столбца A_s заменяются нулями, кроме $a_{ks}=1$. Координаты остальных базисных векторов остаются неизменными;

в) любой элемент a_{ij}^* ($j \neq s$) определяется по формуле:

$$a_{ij}^* = \frac{1}{a_{ks}} (a_{ks} a_{ij} - a_{kj} a_{is}) = a_{ij} - \frac{a_{kj} a_{is}}{a_{ks}} \quad (4)$$

- правило прямоугольника;

г) $(m+1)$ -я строка вычисляется аналогично:

$$\Delta_j^* = \frac{1}{a_{ks}} (a_{ks} \Delta_j - a_{kj} \Delta_s) = \Delta_j - \frac{a_{kj}}{a_{ks}} \Delta_s.$$

6. Если все $\Delta_j^* \geq 0$, то полученный план оптимальный (состоится из компонент A_0) и $Z_{\max} = \Delta_0^*$. В противном случае возвращаемся к п.4 алгоритма. После конечного числа итераций получим оптимальный план или докажем отсутствие такого плана.

Пример 1. Решить симплекс-методом задачу: для изготовления различных изделий А, В, С предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия А, В и С, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл.2. Изделия А, В и С могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Таблица 2.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	А	В	С	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	

Решение. В векторной форме будем иметь

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 + x_6 A_6 = A_0, \text{ где}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Среди векторов A_4, A_5, A_6 - единичные, их принимаем за базисные и, положив $x_1=x_2=x_3=0$, получаем начальный опорный план:

$$X_0=(0, 0, 0, 360, 192, 180).$$

Составляем симплексную таблицу для 1-ой итерации и вычисляем

$Z_0=C_6A_0=0$, $\Delta_1=Z_1-c_1=0-9=-9$, $\Delta_2=Z_2-c_2=-10$, $\Delta_3=Z_3-c_3=-16$ и для векторов базиса $\Delta_4=\Delta_5=\Delta_6=0$. Как видно, основные переменные x_1, x_2, x_3 равны нулю, т.е. производство не начато, прибыль $Z_0=0$, и потому план X_0 не является оптимальным. Находим в каждом из столбцов A_1, A_2, A_3

$$\Theta_j = \min_i \frac{b_i}{a_{ij}} \quad (j=1, 2, 3)$$

$$\Theta_1 = \min_i \left(\frac{360}{18}, \frac{192}{6}, \frac{180}{5} \right) = 20 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad \text{и} \quad \Theta_1 \Delta_1 = -20 \cdot 9 = -180,$$

$$\Theta_2 = \min_i \left(\frac{360}{15}, \frac{192}{4}, \frac{180}{3} \right) = 24 = \frac{b_1}{a_{12}} \quad \text{и} \quad \Theta_2 \Delta_2 = -24 \cdot 10 = -240,$$

$$\Theta_3 = \min_i \left(\frac{360}{12}, \frac{192}{8}, \frac{180}{3} \right) = 24 = \frac{b_2}{a_{23}} \quad \text{и} \quad \Theta_3 \Delta_3 = -24 \cdot 16 = -384.$$

$$\text{Очевидно } \min_j (\Theta_j \Delta_j) = \Theta_3 \Delta_3 = -384.$$

Поэтому вектор A_3 подлежит включению в базис вместо

A_5 ($\Theta_3 = b_2/a_{23}$, разрешающий элемент a_{23}).

Составляем новую таблицу в базисе векторов A_4, A_3, A_6 . Для удобства поместим все итерации последовательно в одну табл. 3.

Таблица 3

i	Базис	C_6	A_0	9	10	16	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	A_5	0	192	6	4	<u>8</u>	0	1	0
3	A_6	0	180	5	3	3	0	0	1
m+1			0	-9	-10	-16	0	0	0
1	A_4	0	72	9	<u>2</u>	0	1	-3/2	0
2	A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	A_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
m+1			384	3	-2	0	0	2	0
1	A_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	A_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	A_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
m+1			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Приведем некоторые этапы заполнения таблицы 2-й итерации.

Все элементы строки A_5 , начиная со столбца A_0 (вектор A_5 подлежит исключению из базиса), делим на $a_{23}=8$. Записываем в соответствующих столбцах базисные векторы A_4, A_3, A_6 ($\Delta_5=\Delta_3=\Delta_6=0$). Вычисляем элементы столбцов A_j по формулам (4). Например:

$$b_1^* = \frac{1}{8} (360 \cdot 8 - 192 \cdot 12) = 72,$$

$$b_3^* = \frac{1}{8} (180 \cdot 8 - 192 \cdot 3) = 108,$$

$$Z_0^* = \frac{1}{8} (0 \cdot 8 + 16 \cdot 192) = 384 \text{ и т.д.}$$

В $(m+1)$ -й строке $\Delta_2=-2<0$, следовательно план не является оптимальным. Вектор A_2 подлежит включению в базис вместо A_4 , так как $\min\left(\frac{72}{9}, \frac{24}{1/2}, \frac{108}{3/2}\right) = \frac{72}{9} = 8$, a_{12}^* - разрешающий элемент.

После 3-й итерации получаем все $\Delta_j \geq 0$ и опорный план $X=(0, 8, 20, 0, 0, 96)$ будет оптимальным, а $Z_{\max}=400$.

Итак, оптимальный план включает изготовление восьми изделий типа В и двадцати изделий С. При этом полностью используется сырье первых двух видов и остается не использованным 96 кг сырья третьего вида, а прибыль от производимой продукции составит 400 руб.

2. Транспортная задача (ТЗ). Методы определения опорных планов

Транспортная задача в общем виде состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$. В качестве критерия оптимальности можно взять минимальную стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Рассмотрим задачу с первым критерием, обозначив через c_{ij} тарифы перевозок единицы груза из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения, через a_i -запасы груза в пункте A_i , через b_j -потребности в грузе пункта B_j , x_{ij} -количество единиц груза, перевозимого из i -го пункта в j -й пункт.

Тогда математическая постановка задачи состоит в определении минимума целевой функции:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (5)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (i = 1, \dots, m), \quad (7)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n). \quad (8)$$

Всякое неотрицательное решение систем уравнений (6)-(7), определяемое матрицей $X=(x_{ij})$, называют **опорным планом** ТЗ, а план $X^* = (x_{ij}^*)$, при котором функция Z (5) принимает минимальное значение - называется **оптимальным планом** ТЗ.

Все данные, а затем и опорный план, удобно занести в распределительную таблицу.

Если общее количество груза в пунктах отправления и общая потребность в нем в пунктах назначения совпадают, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (9)$$

то модель ТЗ называется **закрытой**. В противном случае модель ТЗ называется **открытой**. Для разрешимости задачи равенство (9) является необходимым и достаточным условием.

Если опорный план содержит ровно $m+n-1$ положительных компонент, то он называется **невырожденным**, а если меньше - **вырожденным**.

Нахождение опорных планов ТЗ можно осуществить одним из трех методов: северо-западного угла, минимальной стоимости и аппроксимации Фогеля.

Метод **северо-западного угла** состоит в следующем. Заполняют клетку A_1, B_1 (левый верхний угол), поставив в него $\min(a_1, b_1)$. Если $x_{11}=a_1$, то 1-ая строка выпадает из рассмотрения и заполняют клетку A_2, B_1 , чтобы удовлетворить потребности пункта B_1 , и затем переходят к заполнению клетки A_2, B_2 . Перемещаясь так по диагонали, доходят до последней клетки A_m, B_n . При этом все грузы в A_i будут исчерпаны, и потребности пунктов B_j удовлетворены.

Если заполненных клеток окажется ровно $m+n-1$, то получен опорный план. Если же их меньше - ставят в недостающее число клеток число «0».

Пример 2. Методом северо-западного угла составить опорный план перевозок груза из трех пунктов отправления с запасами 30, 48, 24 т в четыре пункта назначения с потребностями 18, 27, 42, 15 т. Тарифы перевозок c_{ij} (в ден/ед.) из A_i ($i=1,2,3$) в B_j ($j=1,...,4$) приведены в матрице

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим распределительную таблицу (табл.4), в которой последовательно, начиная с верхнего левого угла (клетка A_1, B_1) и двигаясь по диагонали таблицы, заполним клетки до A_3, B_4 .

Таблица 4

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	18	12			30
A_2		15	33		48
A_3			9	15	24
Потребности	18	27	42	15	102

Получили 6 заполненных клеток, данный план является опорным ($n+m-1=4+3-1=6$). Вычислим общую сумму затрат на перевозки груза по этому плану: $Z_1 = 18 \cdot 13 + 12 \cdot 7 + 15 \cdot 8 + 33 \cdot 13 + 9 \cdot 12 + 15 \cdot 9 = 1110$.

План не учитывал тарифов перевозок и, наверное, не будет оптимальным.

Метод **минимальной стоимости** предполагает заполнение на каждом шаге клеток с минимальным тарифом, что даст, очевидно, меньшие суммарные затраты на перевозку груза.

Пример 3. Найдем опорный план по этому методу для задачи из примера 2.

Решение. Первой заполняется клетка A_1, B_4 ($\min c_{ij}=5$), затем A_3, B_1 ($c_{31}=6$) и т.д. План содержит шесть компонент $x_{ij}>0$ и является опорным. При этом $Z_2=924<Z_1$. Вопрос об оптимальности полученного плана остается нерешенным.

Таблица 5

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	13	15	7	11	30
A_2	11	12	8	13	48
A_3	18	6	10	12	24
Потребн.	18	27	42	15	102

Метод аппроксимации Фогеля состоит в следующем:

1) на каждой итерации находят разности между двумя наименьшими тарифами во всех строках и столбцах, записывая их в дополнительные столбец и строку таблицы;

2) находят $\max \Delta c_{ij}$ и заполняют клетку с минимальной стоимостью в строке (столбце), которой соответствует данная разность.

Процесс продолжается до тех пор, пока все грузы не будут развезены по потребителям. Данный метод в ряде задач приводит к оптимальному плану.

Пример 4. Решим этим методом ту же задачу примера 2.

Решение. На первом шаге заполняем клетку A_3, B_1 ($\max \Delta c = 5$ и $\min c_{ij} = 6$), исключаем 1-ый столбец, отметив в дополнительной строке буквой «В» факт выполнения заказа пункта B_1 . Находим новые разности минимальных тарифов по строкам (в столбцах они не изменились) и $\max \Delta c = 2$ в 1-ой строке и в 4-ом столбце. Заполняем клетку A_1, B_4 и исключаем 4-й столбец и т.д. В конце остается последовательно заполнить клетки 3-го столбца остатками запасов в A_1, A_3, A_2 . Составленный опорный план дает значение $Z_3 = 909 < Z_2$.

Таблица 6

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	Δc
A_1	¹³	⁷	¹¹ 15	⁵ 15	30	2,2,4,B
A_2	¹¹	⁸ 27	¹³ 21	⁷	48	1,1,5,B
A_3	⁶ 18	¹⁰	¹² 6	⁹	24	3,1,2,B
b_j	18	27	42	15	102	
Δc	5,B	1,2,B	1,1,1,B	2,B		

3. Нахождение оптимального плана транспортной задачи

Пусть одним из рассмотренных методов найден опорный план, содержащий $n+m-1$ занятых клеток (в некоторых из них могут стоять нули). Поставим в соответствие каждому пункту отправления A_i некоторое число u_i ($i=1, \dots, m$) и каждому пункту назначения B_j - число v_j ($j=1, \dots, n$). Эти числа назовем **потенциалами**, соответственно, пунктов отправления и пунктов назначения.

Вопрос об оптимальности опорного плана решает следующая теорема:

Теорема 4. Если для некоторого плана $X^* = (x_{ij})$, ($i=1,...,m$; $j=1,...,n$) транспортной задачи выполняются условия:

$$1). u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{для } x_{ij} > 0 \quad (\text{для занятых клеток}), \quad (10)$$

$$2). u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \text{для } x_{ij} = 0 \quad (\text{для свободных клеток}), \quad (11)$$

то план X^* является **оптимальным**.

Отметим, что система (16) $(m+n-1)$ уравнений содержит $(m+n)$ неизвестных u_i, v_j , и потому, приравнявая одно из них, например u_1 , нулю, однозначно определим остальные неизвестные.

Для «улучшения» опорного плана (при невыполнении условия (11)) выбирают свободную клетку с $\max (u_i + v_j - c_{ij})$ и строят для нее цикл пересчета (сдвига).

Циклом называют замкнутую ломаную линию, все вершины которой лежат в занятых клетках, кроме одной, расположенной в свободной клетке, подлежащей заполнению, а звенья параллельны строкам и столбцам, причем в каждой строке (столбце) лежит не более 2-х вершин. Всем вершинам поочередно приписывают знаки «+» и «-», начиная со свободной клетки.

Далее, в свободную клетку помещают груз величиной λ , равной минимальному значению из всех чисел в отрицательных клетках цикла. Во все положительные клетки прибавляется λ , из отрицательных - вычитается λ (сдвиг по циклу). Нетрудно подсчитать, насколько изменится (уменьшится) стоимость перевозок при новом плане: $\Delta Z = \lambda \left[\sum_{+} c_{ij} - \sum_{-} c_{ij} \right]$, где $\sum_{+} c_{ij}$ - сумма тарифов в положительных вершинах, $\sum_{-} c_{ij}$ - в отрицательных вершинах цикла.

Новый опорный план снова проверяют на оптимальность с помощью системы уравнений потенциалов.

Пример 5. Проверить оптимальность опорного плана ТЗ, полученного в табл. 5 (методом минимальной стоимости).

Решение. Составляем систему уравнений потенциалов:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + v_2 = 7, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_2 = 8, \\ u_2 + v_3 = 13, \\ u_3 + v_1 = 6, \\ u_3 + v_3 = 12. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Полагая} \\ \text{и} \end{array} \quad \begin{array}{l} u_1 = 0, \\ u_2 = 1, \\ u_3 = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{найдем: } v_1 = 6 \\ v_2 = 7, \\ v_3 = 12, \\ v_4 = 5. \end{array}$$

Проверив свободные клетки, находим, что лишь в клетке A_1, B_3 будет $u_1 + v_3 = 12 > 11 = c_{13}$.

Для заполнения этой клетки строим цикл пересчета (см. табл. 5). Сдвиг по циклу на 15 ед. ($\min(15, 36) = 15$) дает новый опорный план:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом будет $\Delta Z_2 = 15[(11+8)-(7+13)] = -15$ и $Z_3 = Z_2 + \Delta Z_2 = 909$.

Новый опорный план вновь проверим на оптимальность, составим для него систему потенциалов, найдем их, убедимся, что для всех свободных клеток выполняется условие (11). Следовательно, план $X_3 = X_{\text{опт.}}$ и $Z_{\min} = 909$.

4. Индивидуальные задания

4.1. Ресурсная задача

Для изготовления изделий типа А и В используется сырье трех видов, запасы каждого из которых P_1, P_2, P_3 . На производство одного изделия типа А требуется затратить a_1 кг сырья первого вида, a_2 кг сырья второго вида, a_3 кг сырья третьего вида. На одно изделие типа В расходуется соответственно b_1, b_2, b_3 кг сырья каждого вида. Прибыль от реализации единицы изделия А составляет α /ден.ед./, а изделия В - β /ден.ед./. Состав-

вить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации. Решить задачу симплекс-методом. Дать геометрическое истолкование задачи. Все данные приведены в таблице 7.

Таблица 7

№ варианта	Изделие типа А				Изделие типа В				Запасы сырья		
	Затраты сырья на 1 изделие			Цена 1 изделия	Затраты сырья на 1 изделие			Цена 1 изделия	P ₁	P ₂	P ₃
	a ₁	a ₂	a ₃	α	b ₁	b ₂	b ₃	β			
1	16	8	5	4	4	7	9	6	784	552	567
2	12	10	3	6	3	5	6	2	684	690	558
3	4	3	3	6	3	4	5	5	440	393	450
4	11	8	5	5	3	3	3	3	800	500	420
5	15	11	9	3	4	5	10	2	1095	865	1080
6	8	7	4	2	3	6	9	3	864	864	945
7	4	3	2	2	3	4	6	4	480	444	546
8	6	5	3	3	3	10	12	9	714	910	948
9	9	6	3	3	4	7	8	2	801	807	768
10	3	4	3	2	5	8	11	3	453	616	627
11	3	3	2	4	2	3	5	5	273	300	380
12	2	4	3	4	6	2	3	6	486	396	351
13	3	4	2	4	9	2	2	3	648	352	208
14	2	6	3	2	10	3	5	5	900	702	540
15	1	4	3	6	5	2	5	5	350	364	420
16	1	4	3	5	4	3	4	10	352	484	440
17	2	3	4	8	8	4	3	7	384	240	264
18	4	1	4	6	1	2	3	3	220	140	260
19	2	7	6	6	4	3	1	2	480	580	450
20	2	3	3	7	1	6	7	5	438	747	812
21	2	3	2	3	3	6	8	8	428	672	672
22	8	6	3	6	2	3	2	2	840	870	560
23	5	4	3	6	3	3	4	6	750	630	700
24	6	4	3	6	2	3	4	3	600	520	600
25	9	7	4	3	5	8	16	2	1431	1224	1328

4.2. Транспортная задача

Имеются 3 пункта поставки однородного груза А₁, А₂, А₃ и 5 пунктов потребления этого груза В₁, В₂, В₃, В₄, В₅. На пунктах А₁ (i = 1, 2, 3)

груз находится соответственно в количествах a_1, a_2, a_3 условных единиц.

В пункты B_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) требуется доставить соответственно b_j единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из A_i в B_j определена матрицей $C = \{c_{ij}\}$. Решить задачу тремя методами (северо-западного угла, минимальной стоимости и методом Фогеля) и найти такой план закрепления потребителей и поставщиков, чтобы общие затраты на перевозки были минимальны.

1). $a_1 = 200, a_2 = 170, a_3 = 180,$
 $b_1 = 100, b_2 = 70, b_3 = 180,$
 $b_4 = 150, b_5 = 50$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 8 & 10 & 2 \\ 10 & 3 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

2). $a_1 = 120, a_2 = 250, a_3 = 150,$
 $b_1 = 90, b_2 = 70, b_3 = 160,$
 $b_4 = 130, b_5 = 70$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 8 & 4 & 7 \\ 11 & 5 & 7 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

3). $a_1 = 280, a_2 = 350, a_3 = 250,$
 $b_1 = 130, b_2 = 100, b_3 = 300,$
 $b_4 = 270, b_5 = 80$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 10 & 9 & 6 \\ 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 14 & 7 & 10 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

4). $a_1 = 250, a_2 = 270, a_3 = 150,$
 $b_1 = 100, b_2 = 170, b_3 = 160,$
 $b_4 = 170, b_5 = 70$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 16 \\ 8 & 9 & 15 & 4 & 18 \\ 10 & 11 & 13 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

5). $a_1 = 230, a_2 = 250, a_3 = 200,$
 $b_1 = 100, b_2 = 180, b_3 = 160,$
 $b_4 = 160, b_5 = 80$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 11 & 5 & 3 \\ 9 & 5 & 17 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

6). $a_1 = 100, a_2 = 140, a_3 = 150,$
 $b_1 = 60, b_2 = 50, b_3 = 80,$
 $b_4 = 160, b_5 = 40$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 7 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 3 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

7). $a_1 = 175, a_2 = 150, a_3 = 125,$
 $b_1 = 105, b_2 = 75, b_3 = 50,$
 $b_4 = 145, b_5 = 75$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 12 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 11 & 5 & 6 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

8). $a_1 = 200, a_2 = 250, a_3 = 160,$
 $b_1 = 120, b_2 = 120, b_3 = 100,$
 $b_4 = 210, b_5 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 16 & 12 & 20 \\ 21 & 9 & 10 & 9 & 7 \\ 12 & 15 & 16 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

9). $a_1 = 390, a_2 = 450, a_3 = 400,$
 $b_1 = 310, b_2 = 250, b_3 = 150,$
 $b_4 = 440, b_5 = 90$

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 11 & 10 & 12 & 12 \\ 25 & 9 & 13 & 14 & 10 \\ 24 & 7 & 10 & 13 & 22 \end{pmatrix}$$

10). $a_1 = 300, a_2 = 360, a_3 = 400,$
 $b_1 = 150, b_2 = 350, b_3 = 300,$
 $b_4 = 150, b_5 = 110$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 7 & 20 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 11 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

11). $a_1 = 270, a_2 = 390, a_3 = 290,$
 $b_1 = 150, b_2 = 100, b_3 = 250,$
 $b_4 = 340, b_5 = 110$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 17 & 11 & 15 & 3 & 7 \\ 20 & 9 & 15 & 7 & 25 \end{pmatrix}$$

12). $a_1 = 380, a_2 = 450, a_3 = 420,$
 $b_1 = 230, b_2 = 200, b_3 = 400,$
 $b_4 = 270, b_5 = 230$

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 7 & 13 & 10 \\ 14 & 10 & 3 & 14 & 7 \\ 16 & 8 & 10 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

13). $a_1 = 150, a_2 = 230, a_3 = 250,$
 $b_1 = 110, b_2 = 100, b_3 = 200,$
 $b_4 = 140, b_5 = 80,$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 7 & 9 & 3 & 7 & 4 \\ 8 & 7 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

14). $a_1 = 250, a_2 = 190, a_3 = 200,$
 $b_1 = 180, b_2 = 100, b_3 = 130,$
 $b_4 = 140, b_5 = 90$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

15). $a_1 = 180, a_2 = 210, a_3 = 190,$
 $b_1 = 100, b_2 = 150, b_3 = 130,$
 $b_4 = 120, b_5 = 80$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

16). $a_1 = 310, a_2 = 250, a_3 = 240,$
 $b_1 = 290, b_2 = 110, b_3 = 170,$
 $b_4 = 130, b_5 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

17). $a_1 = 280, a_2 = 200, a_3 = 220,$
 $b_1 = 110, b_2 = 100, b_3 = 220,$
 $b_4 = 180, b_5 = 90$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 & 8 & 6 \\ 7 & 3 & 6 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

18). $a_1 = 170, a_2 = 230, a_3 = 180,$
 $b_1 = 95, b_2 = 130, b_3 = 120,$
 $b_4 = 155, b_5 = 80$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 3 & 7 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 12 & 13 \\ 8 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$19). \quad a_1 = 260, a_2 = 190, a_3 = 120, \\ b_1 = 100, b_2 = 120, b_3 = 200 \\ b_4 = 80, b_5 = 70$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 7 & 8 & 4 \\ 10 & 4 & 11 & 13 & 12 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$20). \quad a_1 = 330, a_2 = 300, a_3 = 270, \\ b_1 = 120, b_2 = 200, b_3 = 310, \\ b_4 = 190, b_5 = 80$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 7 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 9 & 6 \\ 7 & 14 & 10 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$21). \quad a_1 = 280, a_2 = 170, a_3 = 260, \\ b_1 = 160, b_2 = 140, b_3 = 200, \\ b_4 = 100, b_5 = 110$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 11 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 8 \\ 5 & 11 & 12 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$22). \quad a_1 = 300, a_2 = 260, a_3 = 230, \\ b_1 = 140, b_2 = 250, b_3 = 150, \\ b_4 = 160, b_5 = 90$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 5 & 10 & 7 & 11 & 6 \\ 7 & 13 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$23). \quad a_1 = 200, a_2 = 150, a_3 = 50, \\ b_1 = 60, b_2 = 70, b_3 = 80, \\ b_4 = 90, b_5 = 100$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$24). \quad a_1 = 200, a_2 = 130, a_3 = 250, \\ b_1 = 90, b_2 = 100, b_3 = 160, \\ b_4 = 150, b_5 = 80$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 8 & 7 & 5 \\ 13 & 3 & 5 & 10 & 6 \\ 6 & 7 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$25). \quad a_1 = 200, a_2 = 260, a_3 = 240, \\ b_1 = 120, b_2 = 180, b_3 = 210, \\ b_4 = 90, b_5 = 100,$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 7 & 5 & 4 \\ 10 & 9 & 5 & 8 & 3 \\ 8 & 13 & 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

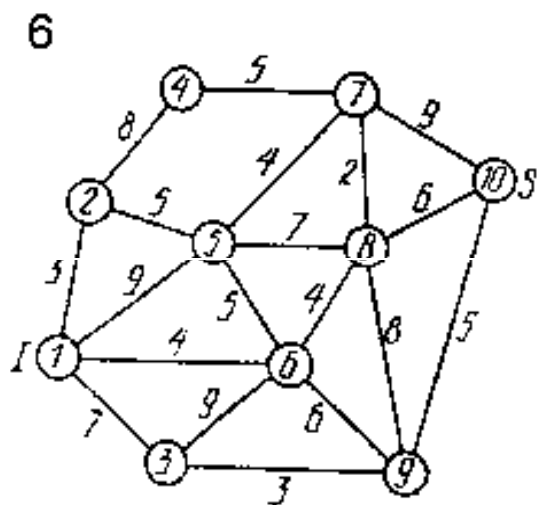
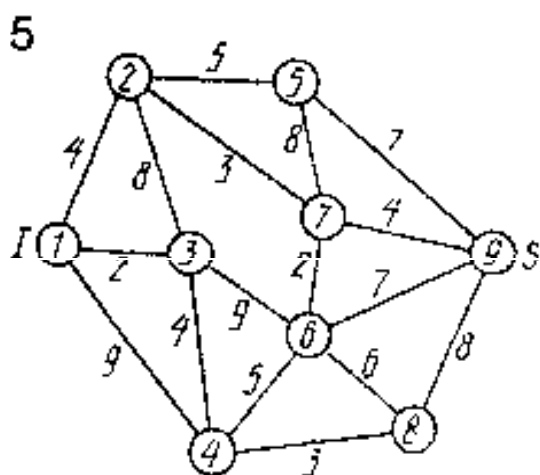
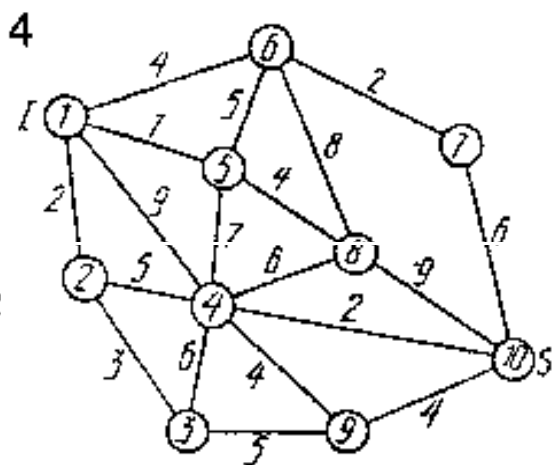
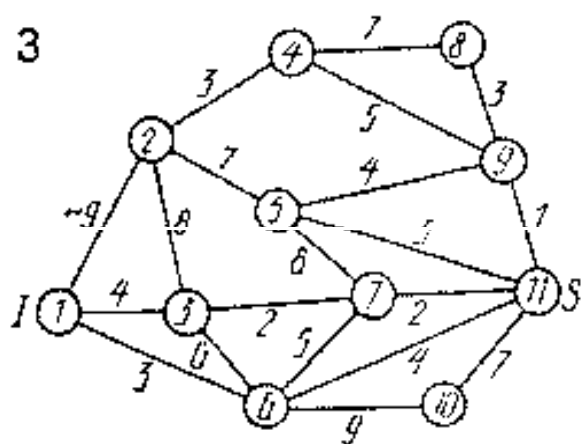
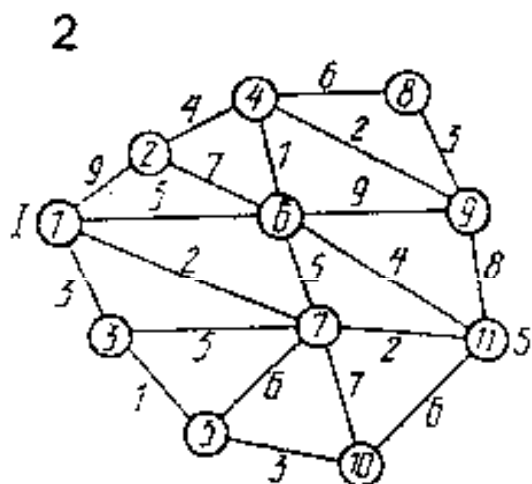
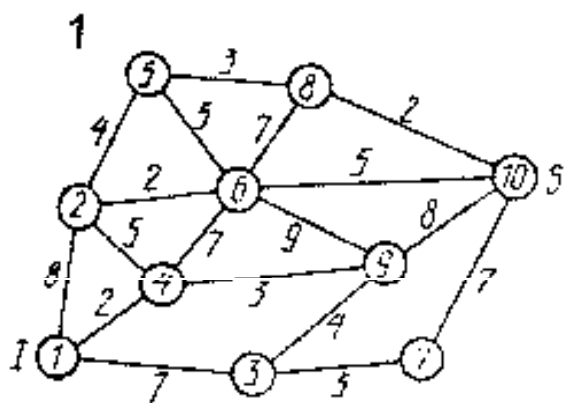
4.3. Задача сетевого программирования

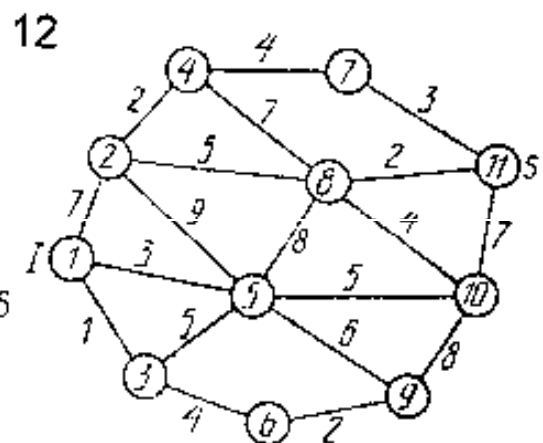
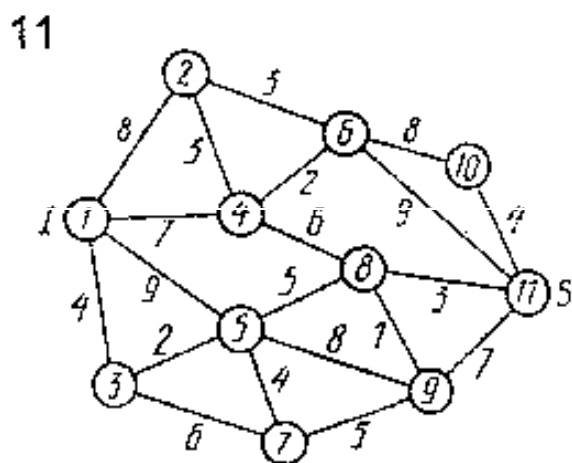
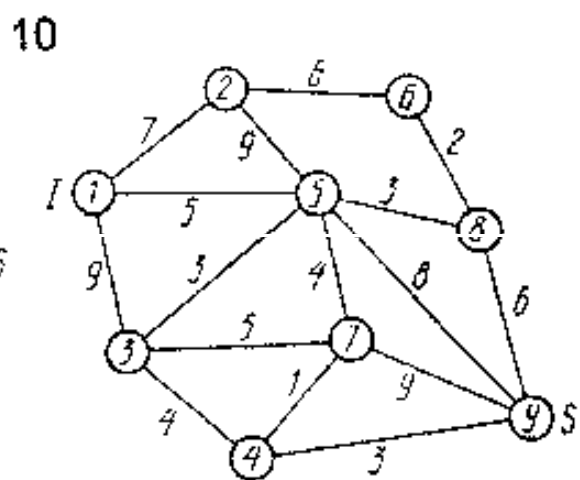
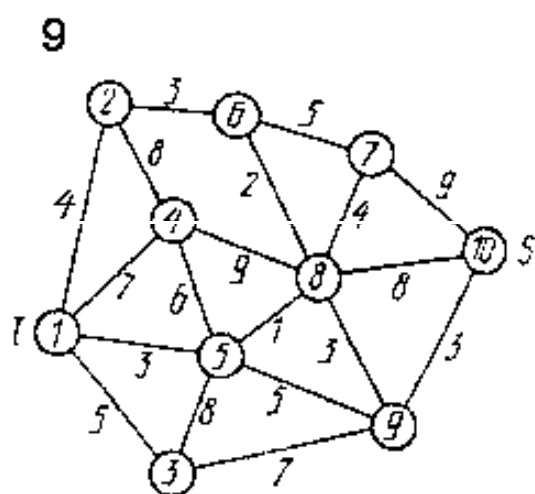
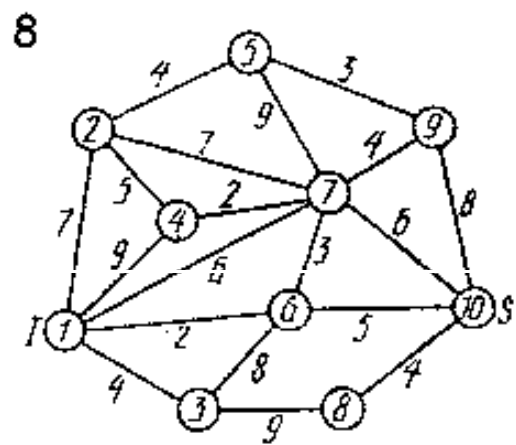
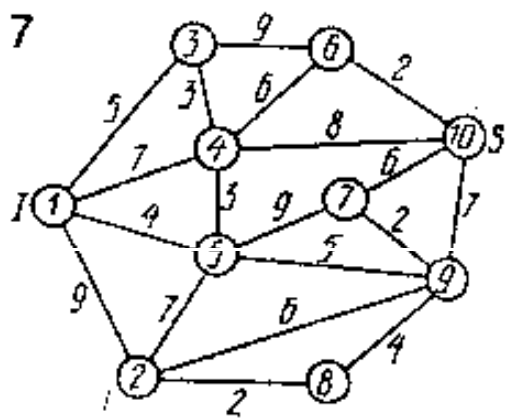
На заданной сети указаны пропускные способности ребер. Предполагается, что пропускные способности в обоих направлениях одинаковы.

Требуется:

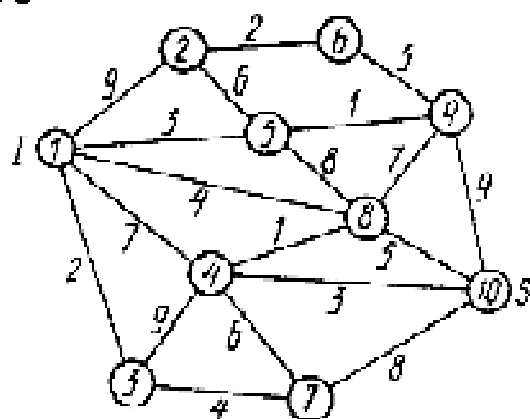
- 1) сформировать из сети поток максимальной мощности, направленной из истока I в сток S ;

2) выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

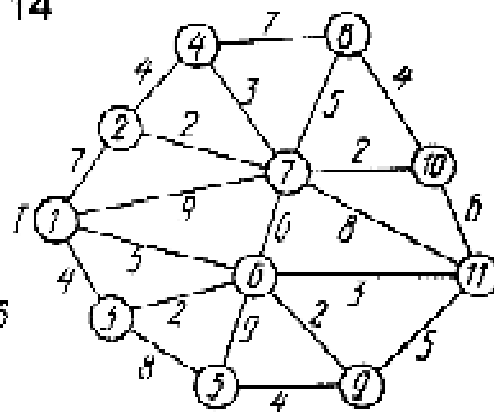




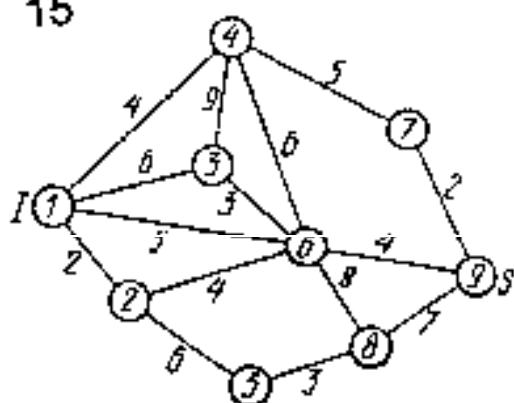
13



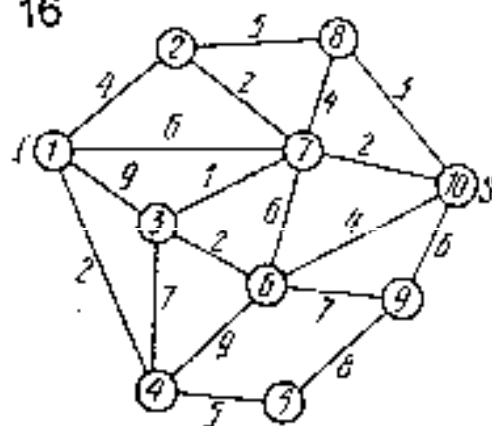
14



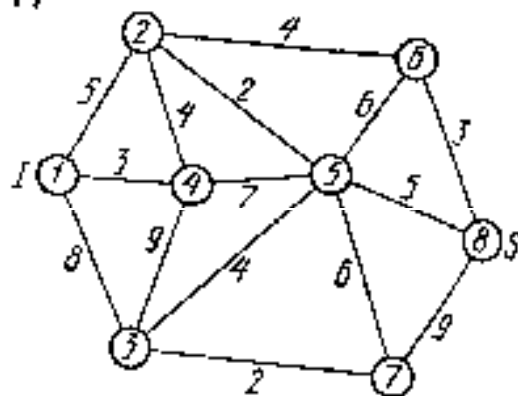
15



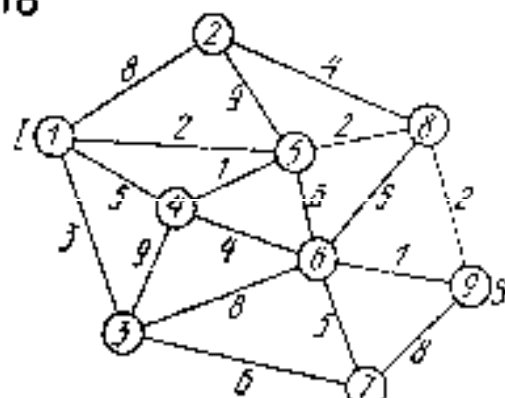
16



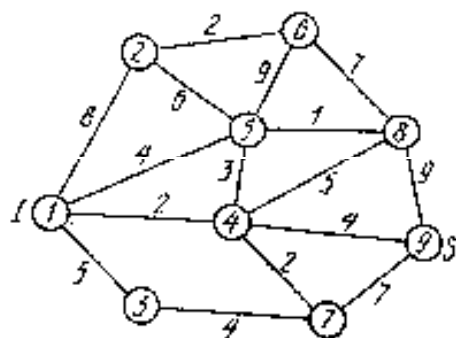
17



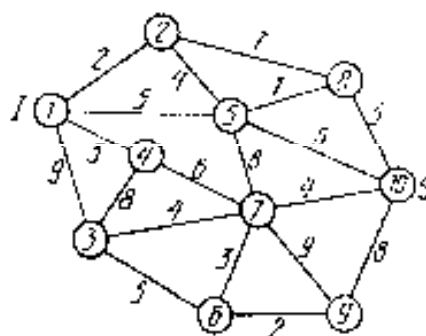
18



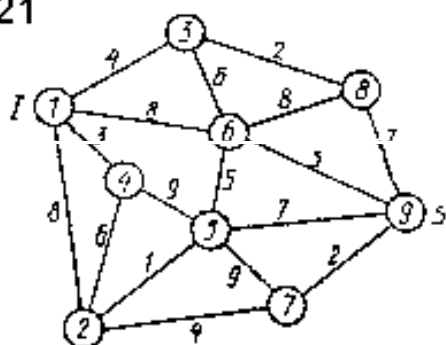
19



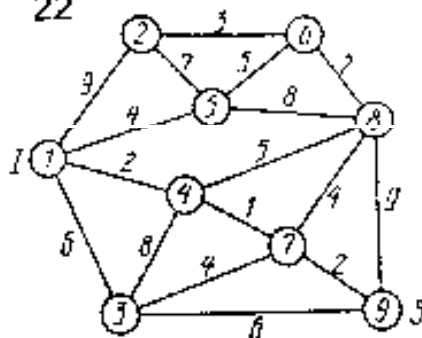
20



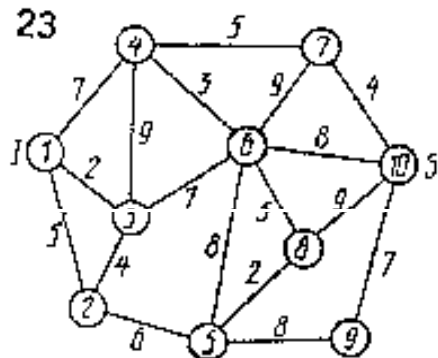
21



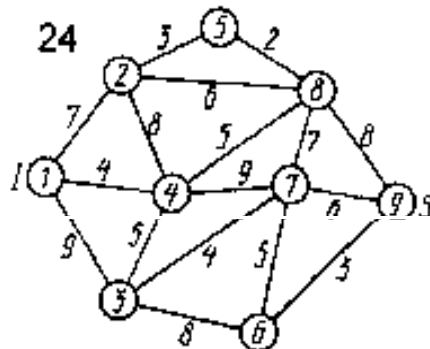
22



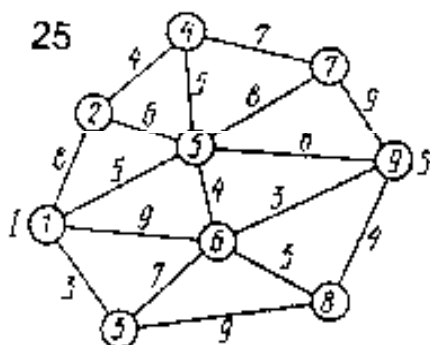
23



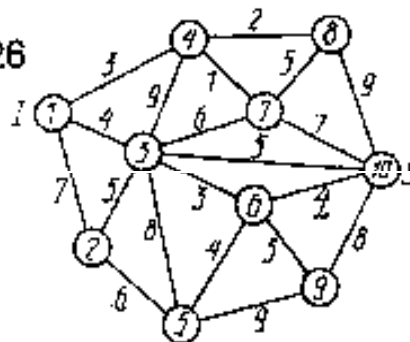
24



25



26



Список рекомендуемой литературы.

1. Борзунова Т.Л., Барыкин М.П., Данилов Е.А., Соловьева О.Ю. Математическое моделирование: Учебное пособие. – ВолгГТУ.- Волгоград, 2008.
2. Кобелев Н. Б. Практика применения экономико-математических методов и моделей. – М., 2000г.
3. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCad: Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб.пособие. М.: Финансы и статистика, 1999
4. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование / Под ред. А. В. Кузнецова. – Минск.: Высшэйшая школа, 1995.
5. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций. – М., 2001г.
6. Solver Suite. Lindo, Lingo, What's Best. Help - LINDO SYSTEMS INC., 2002 г.

Оглавление

Введение.....	3
1. Симплексный метод решения задач линейного программирования.....	3
2. Транспортная задача. Методы нахождения опорных планов.....	8
3. Нахождение оптимального плана транспортной задачи.....	12
4. Индивидуальные задания.....	14
4.1. Ресурсная задача.....	14
4.2. Транспортная задача.....	15
4.3. Задача сетевого программирования.....	18
Список рекомендуемой литературы.....	23

Учебное издание

Ольга Юрьевна Соловьёва
Ирина Александровна Тарасова
Алексей Борисович Симонов

**ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ**

Методические указания

Темплан выпуска электронных изданий 2009 г., поз. № 9.

На магнитносителе. Уч.-изд. л. 1,04.

Подписано на «Выпуск в свет» 10.11.2009. Заказ № 36.

Волгоградский государственный технический университет.
400131, г. Волгоград, пр. им. В. И. Ленина, 28, корп. 1.