

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ И СДАЧИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА» (2 КУРС 3 СЕМЕСТР)

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера студенческого билета или зачетной книжки (если последняя цифра — 0, то номер выполняемого варианта — 10).

Перед решением каждой задачи надо полностью привести ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего варианта.

Чистовой вариант работы выполняют в одном экземпляре, на белой бумаге форматом стандартного писчего листа (формат А-4, 210 х 297 мм). Текстовый редактор Microsoft Word. Работа предоставляется в печатном варианте, на одной стороне листа. Приемлема печать черного цвета, шрифтом размером 14, предпочтительнее Times New Roman или Arial, обычным начертанием и с обычным буквенным интервалом.

Весь текст набирается через одинарный интервал. Отступ красной строки должен быть одинаковым по всей работе и быть равным 1,25 см.

На каждой странице следует оставлять поля:

- левое — 30 мм;
- правое — 20 мм;
- верхнее — 20 мм;
- нижнее — 25 мм.

ЗАДАНИЯ К ТИПОВОМУ РАСЧЕТУ (КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ) ПО РАЗДЕЛУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Задача 1

1. На шахматную доску из 64 клеток ставят наугад две ладьи белого и черного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?
2. Из пяти карточек с буквами «а», «б», «в», «г», «д» наугад одну за другой выбирают две и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово «да»?
3. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что извлеченные наугад два шара окажутся черными?
4. Мальчик забыл две последние цифры номера телефона одноклассника и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечетны и различны. Найти вероятность того, что номер набран правильно.
5. Два человека условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих людей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время?
6. После бури на участке телефонной линии между 40-м и 70-м километрами произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошел между 50-м и 55-м километрами линии?
7. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер берет любые 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в настройке?
8. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которых по жребию распределяют в две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что два сильнейших шахматиста будут играть в разных группах.
9. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, 5 неисправных. Наугад берут 3 радиоприемника. Какова вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника?
10. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 - коричневого цвета, а остальные - черного. Произвольно отбирают 8 пар сапог. Какова вероятность того, что все выбранные сапоги - черного цвета?

Задача 2

1. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,7, вторым - 0,5. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) двумя стрелками; б) хотя бы одним стрелком; в) только одним стрелком.
2. В коробках находятся детали: в первой — 20, из них 13 стандарт-

ных; во второй - 30, из них 26 стандартных. Из каждой коробки наугад берут по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали окажутся нестандартными; б) одна деталь нестандартная; в) обе детали стандартные.

3. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, второй - 0,2 и третий - 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) не менее двух станков; б) два станка; в) три станка.

4. В ящике 50 % деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 % - на заводе № 2 и 30 % - на заводе № 3. Наугад взято три детали. Найти вероятность того, что: а) все три детали — с завода № 1; б) две детали - с завода № 1; в) все три детали - с разных заводов.

5. Для аварийной сигнализации установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй - 0,7. Найти вероятность того, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) не сработает ни один сигнализатор; в) сработает хотя бы один сигнализатор.

6. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка № 1 составляет %, для станка № 2 - 4 %. С каждого станка взяли по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали стандартные; б) одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные.

7. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, - высшего качества, равна 0,9, для второго - 0,7, для третьего - 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества.

8. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку поступающей информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что вероятность отказа за некоторое время T у каждого из них равна 0,2. Найти вероятность безотказной работы за время T : а) каждого устройства; б) хотя бы одного устройства; в) одного устройства.

9. Инженер выполняет расчет, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем справочниках, равны соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

10. Вероятность безотказной работы за время T блока, входящего в прибор, равна 0,85. Для повышения надежности устанавливается такой же резервный блок. Определить вероятность безотказной работы прибора за время T с учетом резервного блока.

ЗАДАЧА 3

1. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени T для узла первого типа равна 0,8,

а для узла второго типа - 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени T . б) Узел проработал гарантийное время T . К какому типу он вероятнее всего относится?

2. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B . Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала B — 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет, б) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен?

3. В вычислительной лаборатории 40 % микрокалькуляторов и 60 % дисплеев. Во время расчета 90 % микрокалькуляторов и 80 % дисплеев работают безотказно, а) Найти вероятность того, что наугад взятая вычислительная машина проработает безотказно во время расчета, б) Выбранная машина проработала безотказно во время расчета. К какому типу вероятнее всего она принадлежит?

4. В состав блока входит 6 радиоламп первого типа и 10 второго. Гарантийный срок обычно выдерживает 80 % радиоламп первого типа и 90 % второго типа. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая радиолампа выдержит гарантийный срок; б) радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа.

5. На сборку поступают детали с трех автоматов, причем с первого 30 %, со второго 40 и с третьего 30 % всех деталей. Вероятность брака для первого автомата равна 0,02, для второго - 0,03, для третьего - 0,04. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь - бракованная, б) Взятая наугад деталь оказалась бракованной. С какого автомата она вероятнее всего поступила?

6. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B . Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B — 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработает гарантийное число часов, б) Взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится?

7. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей - соответственно 6 и 10 студентов. Вероятность выполнения нормы мастера спорта для студентов первой группы равна 0,3, второй - 0,4, третьей - 0,2. Найти вероятность того, что: а) наугад выбранный студент выполнит норму мастера спорта; б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе.

8. На участке, где изготавливаются болты, первый станок производит 25 %, второй - 35, третий - 40 % всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт — с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке.

9. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый обрабатывает 40 %, второй - 30, третий - 20 и четвертый - 10 % всех деталей, поступающих на сборку. Первый автомат дает 0,1 % брака, второй - 0,2, третий -

0,25, четвертый - 0,5 %. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступит стандартная деталь; б) поступившая на сборку стандартная деталь изготовлена первым автоматом.

10. Производится стрельба по мишеням трех типов, из которых 5 мишеней типа *A*, 3 мишени типа *B* и 3 мишени типа *C*. Вероятность попадания в мишень типа *A* равна 0,4, в мишень типа *B* - 0,1, в мишень типа *C* - 0,15. Найти вероятность того, что: а) мишень будет поражена при одном выстреле, если неизвестно, по мишени какого типа он был сделан; б) при одном выстреле (если неизвестно, по мишени какого типа он сделан) будет поражена мишень типа *A*.

ЗАДАЧА 4

1. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 2 % нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание пяти деталей: а) три нестандартные; б) будет наименьшее число нестандартных деталей (из пяти); в) ни одной нестандартной детали.

2. Вероятность перевыполнения годового плана для каждого из восьми рабочих равна 0,8. Найти вероятность того, что перевыполнят годовой план: а) хотя бы один рабочий; б) двое рабочих; в) трое рабочих.

3. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Произведено 7 выстрелов. Найти вероятность того, что имело место: а) четыре поражения цели; б) шесть поражений; в) не более шести поражений.

4. Вероятность поражения цели каждым из семи выстрелов равна 0,8. Найти вероятность поражения цели: а) двумя выстрелами; б) хотя бы одним выстрелом; в) не менее чем тремя выстрелами.

5. Вероятность потопить судно одной торпедой равна 0,2. Выпущено 5 торпед. Найти вероятность того, что имеет место: а) три попадания в судно; б) не менее трех попаданий; в) четыре попадания.

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки равна 0,3. Произведено 6 выстрелов. Найти вероятность того, что произошло: а) три попадания в цель; б) пять попаданий; в) не менее пяти попаданий.

7. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Произведено 5 выстрелов. Найти вероятность того, что будет иметь место: а) четыре поражения цели; б) не менее четырех поражений; в) три поражения.

8. Вероятность попадания в цель равна 0,3. Одновременно сбрасывается 6 бомб. Найти вероятность того, что в цель попадают: а) четыре бомбы; б) не менее четырех бомб; в) не более четырех бомб.

9. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 4% бракованных. Найти вероятность того, что среди взятых на контроль пяти деталей: а) две бракованные; б) хотя бы одна бракованная; в) не более одной бракованной.

10. Вероятность выиграть по одной облигации государственного займа равна $1/3$. Найти вероятность того, что, имея облигаций этого займа, можно

выиграть: а) по двум облигациям; б) по трем облигациям; в) не менее чем по двум облигациям.

ЗАДАЧА 5

1. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более чем на 0,02.

2. Вероятность того, что изделие — высшего сорта, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 - высшего сорта.

3. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие наступит не менее 70 и не более 80 раз.

4. Вероятность того, что изделие - высшего качества, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 400 изделий число изделий высшего качества составит от 194 до 208.

5. Среднее число вызовов, поступающих на коммутатор за 1 мин, равно 2. Найти вероятность того, что за 6 мин поступит не менее трех вызовов, если поток вызовов предполагается простейшим.

6. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится не менее 104 раз, если вероятность его наступления в каждом независимом испытании равна 0,2.

7. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин, равно 2. Найти вероятность того, что за 6 мин прибудет 5 самолетов, если поток прибытия самолетов простейший.

8. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.

9. Средняя плотность болезнетворных бактерий в 1 м^3 воздуха равна 100. Берется на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружена хотя бы одна бактерия.

10. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550.

ЗАДАЧА 6

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

1) значения неопределенных коэффициентов; плотность распределения $f(x)$; построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

2) вероятность того, что значения данной случайной величины находятся на интервале (a, b) ;

3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ;

4) моду, медиану заданной случайной величины.

$$1. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1, \\ Ax + B, & \text{если } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$2) X \in \left(0; \frac{1}{3}\right).$$

$$2. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2, \\ A + B \arcsin \frac{x}{2}, & \text{если } -2 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$2) X \in (-1; 1).$$

$$3. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ A \sin x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$2) X \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right).$$

$$4. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ A \sin 3x + B, & \text{если } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$2) X \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right).$$

$$5. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2, \\ Ax^2 + B, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2) X \in (0; 1).$$

$$6. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ Ax - x^2, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2) X \in (0,25; 0,75).$$

$$7. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x + Ax^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$2) X \in (1; 1,5).$$

$$8. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 2x + Ax^2, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2) X \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right).$$

$$9. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ Ax^2 + x, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$2) X \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right).$$

$$10. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ A\left(x - \frac{x^2}{2}\right), & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2) X \in (0; 0,25).$$

ЗАДАНИЯ К ТИПОВОМУ РАСЧЕТУ (КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ) ПО РАЗДЕЛУ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

ЗАДАЧА 1

В таблице приведен статистический ряд распределения случайной величины X .

Требуется:

а) Вычислить числовые характеристики выборки: выборочное среднее $\bar{x}$; выборочное среднее квадратическое отклонение s ; выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса A^* и E^* ; выборочный коэффициент вариации V .

б) Предполагая, что исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону, найти теоретические частоты и проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности с помощью критерия согласия χ^2 .

в) Найти интервальные оценки параметров нормального закона распределения (доверительную вероятность принять равной $\gamma = 0,95$).

№

вари-
анта

1	x_i	4,0 — 4,2	4,2 — 4,4	4,4 — 4,6	4,6 — 4,8	4,8 — 5,0
	n_i	6	20	46	23	11
2	x_i	3,4 — 3,6	3,6 — 3,8	3,8 — 4,0	4,0 — 4,2	4,2 — 4,4
	n_i	9	24	119	43	5
3	x_i	4,00 — 4,02	4,02 — 4,04	4,04 — 4,06	4,06 — 4,08	4,08 — 4,10
	n_i	6	20	46	23	11
4	x_i	2,0 — 2,2	2,2 — 2,4	2,4 — 2,6	2,6 — 2,8	2,8 — 3,0
	n_i	6	23	38	25	8
5	x_i	9,7 — 9,8	9,8 — 9,9	9,9 — 10,0	10,0 — 10,1	10,1 — 10,2
	n_i	4	11	17	13	5
6	x_i	-0,4 — -0,2	-0,2 — 0,0	0,0 — 0,2	0,2 — 0,4	0,4 — 0,6
	n_i	13	18	45	19	5
7	x_i	19,80 — 19,82	19,82 — 19,84	19,84 — 19,86	19,86 — 19,88	19,88 — 19,90
	n_i	6	13	15	11	5
8	x_i	20,00 — 20,04	20,04 — 20,08	20,08 — 20,12	20,12 — 20,16	20,16 — 20,20
	n_i	7	19	45	20	9
9	x_i	2,0 — 2,2	2,2 — 2,4	2,4 — 2,6	2,6 — 2,8	2,8 — 3,0
	n_i	7	20	44	21	8
10	x_i	1,2 — 1,6	1,6 — 2,0	2,0 — 2,4	2,4 — 2,8	2,8 — 3,2
	n_i	7	20	48	19	6

ЗАДАЧА 2

В таблице приведены наблюдаемые значения признаков X и Y . Требуется:

1. По данным, приведённым в таблице, вычислить числовые характеристики величин X и Y : средние $\bar{x}$, $\bar{y}$; средние квадратические отклонения s_x , s_y , корреляционный момент K_{xy} , коэффициент корреляции r_B .
2. Проверить значимость коэффициента корреляции.
3. Построить диаграмму рассеяния и по характеру расположения точек на диаграмме подобрать общий вид функции регрессии.
4. Найти эмпирические функции регрессии Y на X и X на Y и построить их графики.

№
ва-
ри-
ан-
та

1	X	110	85	70	120	150	90	60	140	100	115
	Y	6,1	4,2	2,9	5,8	8,3	5,2	3,4	7,5	4,9	5,4
2	X	80	60	100	130	120	50	90	150	70	125
	Y	4,2	4,9	7,2	9,1	6,4	3,9	5,1	8,4	3,5	8,7
3	X	160	120	110	80	90	130	150	70	100	60
	Y	12,5	9,3	9,2	6,4	7,5	11,6	13,1	5,2	7,9	4,4
4	X	50	130	100	80	90	70	150	60	140	110
	Y	4,2	10,8	9,6	5,1	7,4	6,2	11,4	3,3	12,2	10,5
5	X	60	90	150	80	110	120	70	130	100	140
	Y	2,9	7,1	11,8	6,3	7,2	8,4	4,8	11,2	6,7	10,6
6	X	70	110	85	65	100	90	120	80	130	110
	Y	2,8	3,5	2,4	2,1	3,4	3,2	3,6	2,5	4,1	3,3
7	X	80	60	100	70	50	110	90	40	75	105
	Y	4,2	4,0	4,5	3,6	3,4	5,2	3,9	3,1	3,3	4,9
8	X	100	110	60	120	70	80	130	75	105	50
	Y	3,8	4,4	3,2	4,8	3,0	3,5	4,5	3,3	4,1	3,1
9	X	120	85	110	70	115	90	60	55	100	130
	Y	4,0	3,6	4,0	2,6	4,3	3,4	2,9	2,5	3,0	4,5
10	X	140	110	120	90	130	80	100	75	135	60
	Y	5,4	4,1	5,6	3,3	4,2	2,9	3,6	2,5	4,9	3,0

ЗАДАЧА 3

Используя приведенные в корреляционной таблице данные, требуется:

1. Найти числовые характеристики выборки — средние $\bar{x}$, $\bar{y}$; средние квадратические отклонения s_x , s_y ; корреляционный момент K_{xy} , выборочный коэффициент корреляции r_B .
2. Проверить значимость коэффициента корреляции.
3. Найти эмпирические функции регрессии y_x , x_y .

№
варианта

1.	X \ Y	1	3	5	7	9
	5	3	2			
	6	6	14	3	1	
	7	1	6	27	12	2
	8			5	4	8
	9				2	4

2.	X \ Y	3	5	7	9	11
	4	4				
	8	1	6	2		
	12		4	10	2	
	16			6	9	2
	20				1	3

3.	X \ Y	2	6	10	14	18
	5	2	4	2		
	10		2	10	4	
	15			3	10	5
	20				2	5
	25					1

4.	X \ Y	3	5	7	9	11
	40	4	1			
	60	1	3	3		
	80		2	7	4	
	100			4	8	1
	120				4	8

№
варианта

5.	X \ Y	8	10	12	14	16
	2	3	2			
	4	5	15	3	1	
	6	1	5	30	10	2
	8			5	4	8
	10				2	4

6.	X \ Y	2	4	6	8	10
	5	3	1			
	7	1	5	2		
	9		4	18	5	
	11			8	18	7
	13			6	19	3

7.	X \ Y	43	45	47	49	51
	20	2	4			
	25		6	2		
	30		3	50	2	
	35		1	10	6	
	40			4	7	3

8.	X \ Y	20	30	40	50	60
	43	1	5	2		
	45	1	9	4		
	47		4	40	8	
	49			1	12	2
	51			1	3	7

9.	X \ Y	5	10	15	20	25
	2			2	10	1
	6		6	12	2	
	10	6	8	15	1	
	14	6	11	5		
	18	10	4	1		

10.	X \ Y	1	6	11	16	21
	8			1	4	1
	12		2	4	2	
	16		2	4	4	
	20	1	9	2		
	24	10	1			

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

При решении задач типового расчета по математической статистике используются основные понятия математической статистики: способы группировки статистического материала, числовые характеристики выборки, теория точечных и интервальных оценок параметров нормального распределения, теория проверки статистических гипотез, элементы регрессионного анализа и теории корреляции. Соответствующий теоретический материал должен быть изучен студентами самостоятельно.

Пример 1. При сверлении 80 отверстий одним и тем же сверлом и последующим измерением диаметров отверстий получены следующие результаты (в мм).

40,26	40,55	40,44	40,35	40,39	40,40	40,42	40,32
40,37	40,35	40,44	40,35	40,30	40,34	40,31	40,32
40,33	40,41	40,35	40,30	40,33	40,38	40,33	40,33
40,28	40,30	40,40	40,36	40,32	40,42	40,35	40,34
40,29	40,30	40,31	40,33	40,36	40,34	40,30	40,30
40,41	40,40	40,33	40,37	40,34	40,30	40,43	40,34
40,35	40,34	40,34	40,31	40,43	40,36	40,34	40,34
40,28	40,44	40,32	40,34	40,31	40,31	40,36	40,34
40,29	40,39	40,39	40,37	40,37	40,38	40,36	40,41
40,27	40,38	40,37	40,37	40,36	40,35	40,32	40,36

Требуется:

- 1) составить интервальные статистические ряды распределения частот и относительных частот (частостей) наблюдаемых значений случайной величины X — диаметров отверстий;
- 2) построить гистограмму и полигон относительных частот (частостей) диаметров отверстий;
- 3) найти эмпирическую функцию распределения и построить её график;
- 4) вычислить числовые характеристики выборки: выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию s^2 , выборочное среднее квадратическое отклонение s , выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса A^* и E^* , выборочный коэффициент вариации V ;
- 5) по виду гистограммы и полигона частостей, а также выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса и, исходя из механизма образования исследуемой случайной величины X , сделать предварительный выбор закона распределения этой случайной величины;
- 6) найти точечные оценки параметров нормального закона распределения, предполагая, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону, записать дифференциальную (плотность вероятности) и интегральную функции распределения этой случайной величины;

7) найти теоретические частоты нормального закона распределения, проверить согласие эмпирической функции распределения с нормальным законом с помощью критерия согласия χ^2 ;

8) найти интервальные оценки параметров нормального закона распределения (доверительную вероятность принять равной $(1 - \alpha) = \gamma = 0,95$).

Решение. 1) Изучение непрерывных случайных величин начинается с группировки статистического материала, т.е. с разбиения интервала наблюдения значений случайной величины X (СВ X) на k частичных интервалов равной длины и подсчета частот попадания наблюдаемых значений СВ X в частичные интервалы. Количество интервалов выбирается произвольно. Обычно число интервалов бывает не менее 5 и не более 15 (в учебных целях рекомендуется выбирать число интервалов равным 5—6).

Разобьём весь диапазон наблюдаемых значений на пять частичных интервалов (разрядов). Длину частичного интервала определим по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{40,44 - 40,26}{5} = 0,036.$$

Для упрощения вычислений примем $h = 0,4$. За начало первого интервала принимаем величину $x_1^* = 40,24$. Тогда $x_2^* = 40,28$ и т.д.; первый частичный интервал будет $[40,24; 40,28)$, второй — $[40,28; 40,32)$ и т.д. При составлении интервального статистического ряда в каждый интервал (кроме последнего) будем включать значения СВ X , которые больше либо равны левой границе интервала и строго меньше правой границы; в последний интервал включим значения, равные правой границе. В результате получим статистический ряд распределения частот (табл. 1).

Таблица 1

Частичные интервалы	$[40,24; 40,28)$	$[40,28; 40,32)$	$[40,32; 40,36)$	$[40,36; 40,40)$	$[40,40; 40,44]$
Середины интервалов, x_i	40,26	40,30	40,34	40,38	40,42
Частоты, m_i	4	14	30	19	13

$$n = \sum m_i = 80$$

З а м е ч а н и е. В задаче 1 типового расчета интервальный статистический ряд частот задан, т.е. группировка статистического материала уже произведена. Поэтому решение задач следует начинать с составления статистического ряда распределения частостей.

Для получения статистического ряда частостей разделим частоты m_i на объем выборки n : $w_i = \frac{m_i}{n}$. В результате получим статистический ряд распределения частостей (столбец 3 табл. 2).

Таблица 2

Частичные интервалы	Середины интервалов, x_i	Частоты, w_i	$\frac{w_i}{h}$	Накопленные частоты, $F^*(x)$
[40,24; 40,28)	40,26	0,0500	1,2500	0,0500
[40,28; 40,32)	40,30	0,1750	4,3750	0,2250
[40,32; 40,36)	40,34	0,3750	9,3750	0,6000
[40,36; 40,40)	40,38	0,2375	5,9375	0,8375
[40,40; 40,44]	40,42	0,1625	4,0625	1,0000

2) Для построения гистограммы относительных частот (частостей) на оси ОХ откладываются частичные интервалы, на каждом из них строится прямоугольник высотой $\frac{w_i}{h}$ (см. столбец 4 табл. 2), площадь которого равна относительной частоте (частости) данного частичного интервала; сумма площадей таких прямоугольников равна 1.

Полигон частостей представляет собой многоугольник с вершинами в точках $\left(x_i, \frac{w_i}{h}\right)$.

Гистограмма и полигон частостей представлены на Рис. 1 (для наглядности, при построении гистограммы, полигона частостей и, далее, эмпирической функции распределения масштаб по оси абсцисс и оси ординат может быть выбран различным).

3) Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ определяется по значениям накопленных частостей соотношением

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} w_i,$$

где суммируются частоты тех элементов выборки, для которых выполняется неравенство $x_i < x$, и x_i — середина интервала группировки. Очевидно, что $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_n$. На промежутке $(x_1, x_n]$ $F^*(x)$ представляет собой неубывающую кусочно постоянную функцию.

Таким образом (см. последний столбец табл. 2), имеем следующую эмпирическую функцию распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 40,26] \\ 0,05 & x \in (40,26; 40,30] \\ 0,225 & x \in (40,30; 40,34] \\ 0,6 & x \in (40,34; 40,38] \\ 0,8375 & x \in (40,38; 40,42] \\ 1 & x \in (40,42; +\infty) \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения изображен на Рис. 2.

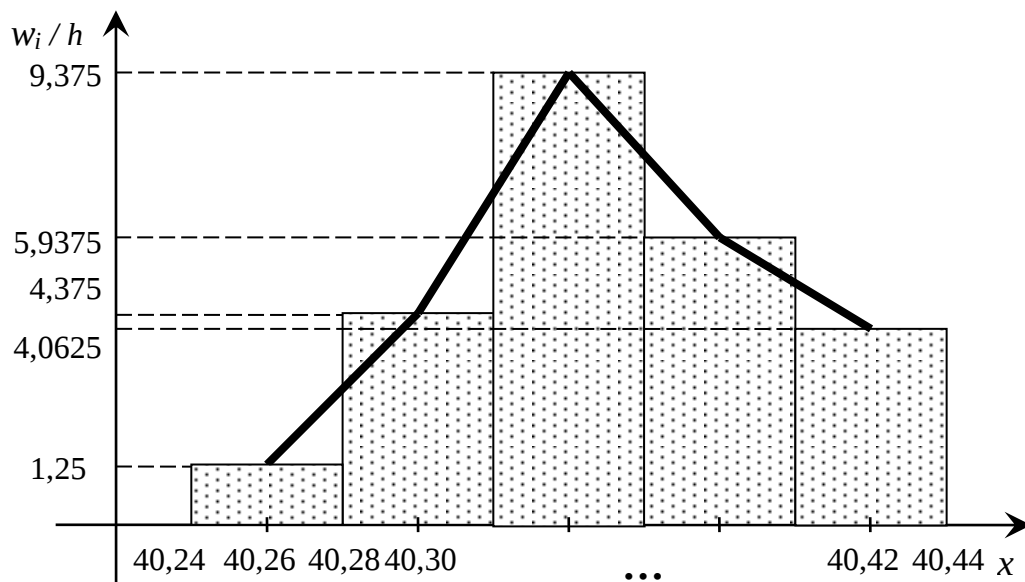


Рис. 1

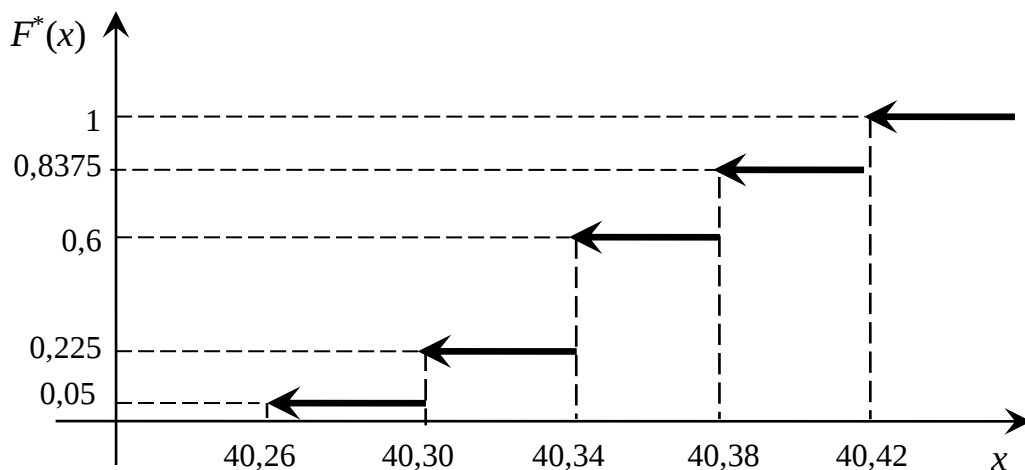


Рис. 2

4) Выборочное среднее вычислим по формуле $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i m_i$:

$$\bar{x} = \frac{40,26 \cdot 4 + 40,30 \cdot 14 + 40,34 \cdot 30 + 40,38 \cdot 19 + 40,42 \cdot 13}{80} = 40,352.$$

Для вычисления остальных числовых характеристик выборки предварительно вычислим центральные эмпирические моменты 2, 3 и 4 порядков:

$$\mu_k = \frac{\sum m_i (x_i - \bar{x})^k}{n} \quad (k = 2, 3, 4).$$

Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Частичные интервалы	Средины интервалов, x_i	Частоты, m_i	$(x - x_i)^2 m_i$	$(x - x_i)^3 m_i$	$(x - x_i)^4 m_i$
[40,24; 40,28)	40,26	4	0,0339	-0,00312	0,00029
[40,28; 40,32)	40,30	14	0,0379	-0,00197	0,00010
[40,32; 40,36)	40,34	30	0,0043	-0,00005	0,00000
[40,36; 40,40)	40,38	19	0,0149	0,00042	0,00001
[40,40; 40,44]	40,42	13	0,0601	0,00409	0,00028
Σ		80	0,1511	-0,00063	0,00068
μ_k			0,0019	-0,0000079	0,0000085

Имеем

выборочная дисперсия $s^2 = \mu_2 = 0,0019$;

выборочное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,0019} \approx 0,044$;

выборочный коэффициент асимметрии $A^* = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{-0,0000079}{(0,044)^3} \approx -0,0927$;

выборочный коэффициент эксцесса $E^* = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0,0000085}{(0,044)^4} - 3 \approx -0,7322$;

выборочный коэффициент вариации $V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0,044}{40,352} \cdot 100\% \approx 0,109\%$.

5) Для предварительного выбора закона распределения вычислим вначале средние квадратические ошибки определения асимметрии

$$S_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 79}{81 \cdot 83}} \approx 0,266$$

и эксцесса

$$S_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 80 \cdot 78 \cdot 77}{79^2 \cdot 83 \cdot 85}} \approx 0,512.$$

Критерием распределения диаметров отверстий (СВ X) по нормальному закону является равенство нулю выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса. Из приведённых расчётов видно, что выборочные коэффициенты асимметрии A^* и эксцесса E^* отличаются (по абсолютной величине) от нуля не более чем на удвоенные средние квадратические ошибки их определения, что соответствует нормальному закону распределения.

Вид гистограммы и полигона частостей (Рис. 1) также напоминает нормальную кривую (кривую Гаусса).

Можно предположить, что диаметр отверстий (СВ X) изменяется под влиянием большого числа факторов примерно равнозначных по силе (изменение температуры, вибрация, изменение механических свойств сверла или заготовки и т.д.). Поэтому, исходя из «технологии» образования СВ X , т.е. механизма образования отклонений диаметров отверстий от некоторого номинального значения, можно предположить, что закон распределения диаметров отверстий является нормальным.

б) Дифференциальная функция нормального закона распределения $N(a, \sigma)$ с параметрами a, σ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Точечными оценками параметров a, σ нормального распределения являются выборочное среднее и выборочное среднее квадратичное отклонение соответственно:

$$a = \bar{x} = 40,352; \sigma = s = 0,044.$$

Следовательно, дифференциальная функция предполагаемого нормального закона распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{0,044\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-40,352)^2}{0,0038}},$$

интегральная функция предполагаемого нормального закона распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{0,044\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-40,352)^2}{0,0038}} dt.$$

Используя нормированную функцию Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, интеграль-

ную функцию распределения нормального закона можно записать в виде

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 40,352}{0,044}\right).$$

7) Проведем детальную проверку гипотезы о распределении СВ X (диаметра отверстий) по нормальному закону с помощью критерия согласия χ^2 . Для этого пронормируем частичные интервалы, выразив их в единицах среднего квадратического отклонения s :

$$u_i = \frac{x_i^* - \bar{x}}{s},$$

причем наименьшее значение u_i положим равным $-\infty$, наибольшее — $+\infty$ (см. столбец 3 табл. 4). Заметим, что так определённая СВ U является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с параметрами $a = 0$; $\sigma = 1$.

Таблица 4

Частичные интервалы	Частоты, m_i	Нормированные интервалы, (u_i, u_{i+1})	Теоретические вероятности, p_i	Теоретические частоты, $n \cdot p_i$	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{n p_i}$
[40,24; 40,28)	4	$(-\infty; -1,64)$	0,0505	4,0	0,00	0,00
[40,28; 40,32)	14	$(-1,64; -0,73)$	0,1822	14,6	0,36	0,02
[40,32; 40,36)	30	$(-0,73; 0,18)$	0,3387	27,1	8,41	0,31
[40,36; 40,40)	19	$(0,18; 1,09)$	0,2907	23,3	18,49	0,79
[40,40; 40,44]	13	$(1,09; \infty)$	0,1379	11,0	4,00	0,36
Суммы	80		1,000	80,0		$\chi_n^2 = 1,48$

Далее вычисляем теоретические вероятности — вероятности попадания СВ X , распределённой по нормальному закону с параметрами $a = 40,352$; $\sigma = 0,044$, в частичные интервалы (x_i^*, x_{i+1}^*) по формуле

$$p_i = P(x_i^* < X < x_{i+1}^*) = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i),$$

где

$$u_i = \frac{x_i^* - \bar{x}}{s},$$

$$\Phi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(значения функции Лапласа приведены в таблице ПЗ).

Например, вероятность того, что СВ X попадает в первый частичный нормированный интервал $(-\infty < x < 40,28)$ равна

$$p_1 = P(-\infty < X < 40,28) = \Phi\left(\frac{40,28 - 40,352}{0,044}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 40,352}{0,044}\right) = \Phi(-1,64) - \Phi(-\infty) = -\Phi(1,64) + \Phi(\infty) = -0,4495 + 0,5 = 0,0505.$$

Аналогично

$$p_2 = P(40,28 < X < 40,32) = \Phi\left(\frac{40,32 - 40,352}{0,044}\right) - \Phi\left(\frac{40,28 - 40,352}{0,044}\right) = \\ = \Phi(-0,73) - \Phi(-1,64) = -\Phi(0,73) + \Phi(1,64) = -0,2673 + 0,4495 = 0,1822$$

и т.д. (см. столбец 4 табл. 4).

После этого вычисляют теоретические частоты нормального закона распределения $n'_i = np_i$ (см. столбец 5 табл. 4) и наблюдаемое значение критерия χ^2 :

$$\chi^2_{\text{н}} = \sum \frac{(m_i - n p_i)^2}{n p_i},$$

где m_i — эмпирические частоты, np_i — теоретические частоты.

В результате вычислений получили $\chi^2_{\text{н}} = 1,48$ (см. столбец 7 табл. 4).

Затем по таблицам квантилей распределения χ^2 (см. таблицу П5) находят критическое значение $\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2_{\alpha; \nu}$, где $\alpha = 1 - \gamma$ — уровень значимости и $\nu = k - r - 1$ — число степеней свободы (здесь k — число интервалов, r — число параметров предполагаемого закона распределения СВ X). В нашей задаче $\alpha = 1 - \gamma = 0,05$, $k = 5$, $r = 2$ и, следовательно, $\nu = 2$. Таким образом, критическое значение $\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2_{0,05; 2} = 5,99$.

Если $\chi^2_{\text{н}} \leq \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза о нормальном распределении СВ X (диаметра отверстий) принимается; в противном случае, т.е. если $\chi^2_{\text{н}} > \chi^2_{\text{кр}}$, гипотеза о распределении СВ X по нормальному закону отвергается. Поскольку в нашей задаче $\chi^2_{\text{н}} = 1,48 < \chi^2_{\text{кр}} = 5,99$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении СВ X — диаметра отверстий.

8) Найдем интервальную оценку математического ожидания нормального распределения.

Интервальная оценка для математического ожидания нормального распределения имеет вид

$$\bar{x} - t_{\alpha; \nu} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\alpha; \nu} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{x}$ — выборочное среднее,

n — объем выборки,

$t_{\alpha; \nu}$ — квантиль распределения Стьюдента для уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma$ и числа степеней свободы $\nu = n - 1$, отыскиваемое по таблице П4.

Так как в нашей задаче $\bar{x} = 40,352$; $s = 0,044$; $n = 80$; $\alpha = 0,05$; $\nu = 79$, то $t_{\alpha; \nu} = t_{0,05; 79} = 1,99$.

Таким образом, имеем следующую интервальную оценку математического ожидания:

$$40,352 - 1,99 \cdot \frac{0,044}{\sqrt{80}} < a < 40,352 + 1,99 \cdot \frac{0,044}{\sqrt{80}},$$

$$40,342 < a < 40,362.$$

Смысл полученного результата. Если будет произведено достаточно большое число выборок по 80 отверстий, то в 95% из них доверительный интервал (40,342; 40,362) накроет математическое ожидание диаметра отверстий и только в 5% среднее диаметра отверстий может выйти за границы доверительного интервала.

Пример 2. Экономист, изучая зависимость выработки Y (ден.ед.) на одного работника торговли от величины товарооборота X (ден.ед.) магазина за определённый период, получил данные по $n = 15$ магазинам одинакового профиля (см. табл. 5).

Таблица 5

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	150	38	85	28	146	34	95	50	134	120	74	140	110	60	86
Y	7,2	5,8	7,5	4,4	8,4	4,5	7,0	5,0	6,4	8,0	6,0	7,8	6,2	5,8	6,0

Требуется:

1. По данным, приведённым в таблице, вычислить числовые характеристики величин X и Y : средние $\bar{x}$, $\bar{y}$; средние квадратические отклонения s_x , s_y , корреляционный момент K_{xy} , коэффициент корреляции r .

2. Проверить значимость коэффициента корреляции.

3. Построить диаграмму рассеяния и по характеру расположения точек на диаграмме подобрать общий вид функции регрессии.

4. Найти эмпирические функции регрессии Y на X и X на Y и построить их графики.

Решение.

1. Прежде чем вычислять основные статистические характеристики, составим таблицу, содержащую исходные данные и промежуточные вычисления (табл. 6).

Таблица 6

№ п/п	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	2	3	4	5	6
1	150	7,2	22500	51,84	1080,0
2	38	5,8	1444	33,64	220,4
3	85	7,5	7225	56,25	637,5
4	28	4,4	784	19,36	123,2
5	146	8,4	21316	70,56	1226,4
6	34	4,5	1156	20,25	153,0
7	95	7,0	9025	49,00	665,0
8	50	5,0	2500	25,00	250,0

1	2	3	4	5	6
9	134	6,4	17956	40,96	857,6
10	120	8,0	14400	64,00	960,0
11	74	6,0	5476	36,00	444,0
12	140	7,8	19600	60,84	1092,0
13	110	6,2	12100	38,44	682,0
14	60	5,8	3600	33,64	348,0
15	86	6,0	7396	36,00	516,0
$\sum_{i=1}^{15}$	1350	96,0	146482	640,78	9261,1

Используя полученные суммы по столбцам, вычислим статистические характеристики:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1350}{15} = 90; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i = \frac{96}{15} = 6,4; \\ s_x^2 &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{146478}{15} - 90^2 = 1665,20; \\ s_y^2 &= \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = \frac{640,78}{15} - (6,4)^2 \approx 1,425; \\ s_x &= \sqrt{s_x^2} = \sqrt{1665,20} \approx 40,81; \quad s_y = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{1,425} \approx 1,19; \\ K_{xy} &= \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{9261,1}{15} - 90 \cdot 6,4 \approx 41,01; \\ r &= \frac{K_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{41,01}{40,81 \cdot 1,19} \approx 0,84.\end{aligned}$$

2. Проверим значимость полученного выборочного коэффициента корреляции по t -критерию Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,84\sqrt{15-2}}{\sqrt{1-(0,84)^2}} \approx 5,58.$$

По таблицам квантилей распределения Стьюдента по наиболее употребляемому в технике уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $\nu = n - 2 = 15 - 2 = 13$ находим критическое значение критерия Стьюдента

$$t_{\text{кр}} = t_{\alpha; \nu} = t_{0,05; 16} = 2,12.$$

Так как $t_{\text{набл}} = 5,58 > t_{\text{кр}} = 2,12$, то выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля.

Значение коэффициента корреляции попало в интервал от 0,7 до 0,9 таблицы Чеддока (табл. П6), т.е. связь между признаками Y и X высокая.

3. По приведенным данным строим диаграмму рассеяния.

Для этого на плоскость xOy наносим 15 точек, координаты которых заданы в условии: $(x_1; y_1) = (150; 7,2)$, $(x_2; y_2) = (38; 5,8)$, $(x_3; y_3) = (85; 7,5)$, ...,

$(x_{15}; y_{15}) = (86; 6,0)$ (см. Рис. 3. На этом же рисунке начертим, после получения уравнений, и линии регрессии.)

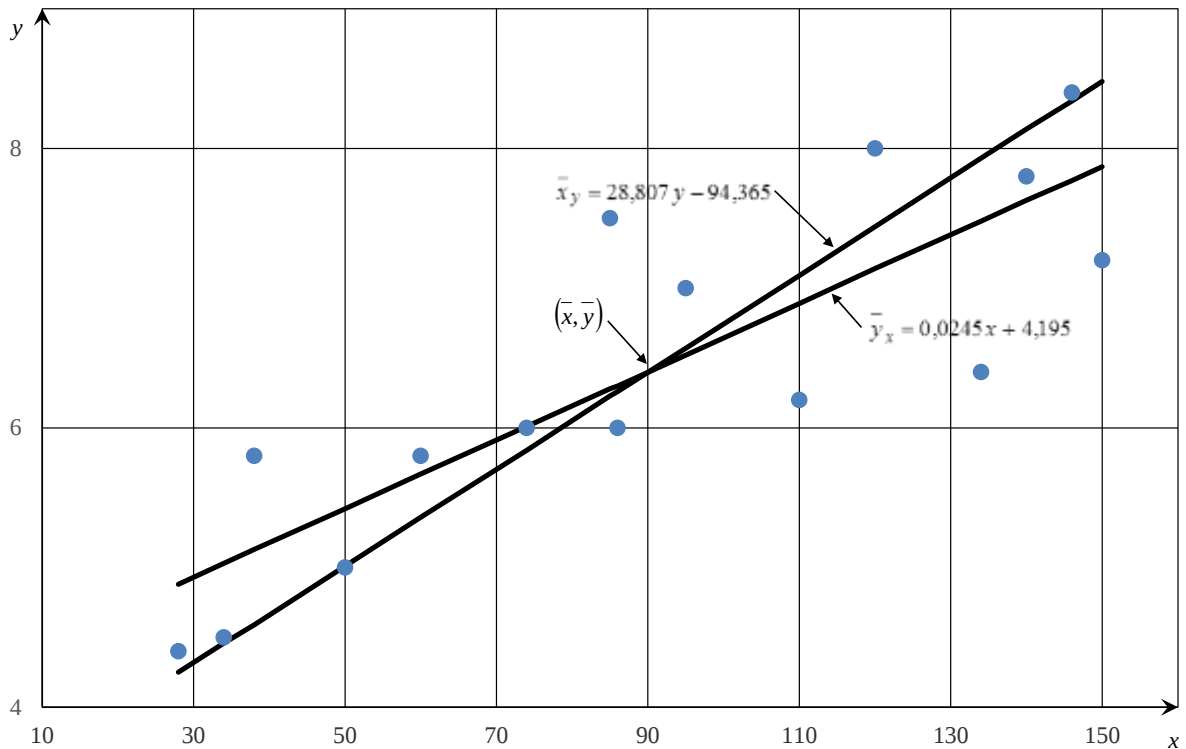


Рис. 3

4. Из диаграммы рассеяния видно, что связь между признаками Y и X можно принять линейной. Находить уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y будем в виде

$$\bar{y}_x = \rho_{xy}x + a \text{ и } \bar{x}_y = \rho_{yx}y + b$$

соответственно. Параметры этих уравнений вычисляются по формулам

$$\rho_{xy} = r_B \frac{s_y}{s_x}, \quad a = \bar{y} - \rho_{xy} \bar{x};$$

$$\rho_{yx} = r_B \frac{s_x}{s_y}, \quad b = \bar{x} - \rho_{yx} \bar{y}.$$

Таким образом, имеем

$$\rho_{xy} = 0,84 \cdot \frac{1,19}{40,81} \approx 0,0245; \quad a = 6,4 - 0,0245 \cdot 90 \approx 4,186;$$

$$\rho_{yx} = 0,84 \cdot \frac{40,81}{1,19} \approx 28,807; \quad b = 90 - 28,807 \cdot 6,4 \approx -94,365.$$

Контроль вычислений по формуле (7):

$$\sqrt{\rho_{xy} \cdot \rho_{yx}} = \sqrt{0,0245 \cdot 28,807} \approx 0,84 = r_B.$$

Тогда линейные уравнения регрессии имеют вид:

Y на X

$$\bar{y}_x = 0,0245x + 4,195$$

и X на Y

$$\bar{x}_y = 28,807y - 94,365.$$

По полученным линейным уравнениям регрессии на диаграмме рассеяния строим прямые линии регрессии (см. Рис. 3).

Пример 3. В табл. 7 приводятся результаты измерения предела прочности (Y , кг/мм²) и предела текучести (X , кг/мм²) 50 марок стали.

Таблица 7

$y \backslash x$		предел текучести						n_y
		40	60	80	100	120	140	
предел прочности	160					1	3	4
	140				3	5		8
	120			4	8	1		13
	100		2	7	4			13
	80	1	3	3				7
	60	4	1					5
	n_x	5	6	14	15	7	3	$n=50$

Требуется:

1. По данным, приведённым в таблице, вычислить числовые характеристики величин X и Y : средние $\bar{x}$, $\bar{y}$; средние квадратические отклонения s_x , s_y , корреляционный момент K_{xy} , коэффициент корреляции r .

2. Проверить значимость коэффициента корреляции.

3. Построить диаграмму рассеяния и по характеру расположения точек на диаграмме подобрать общий вид функции регрессии.

4. Найти эмпирические функции регрессии Y на X и X на Y и построить их графики.

Решение.

1. Вычисление числовых характеристик для группированной выборки проведем по следующим формулам:

выборочные средние

$$\bar{x} = \frac{\sum n_{x_i} \cdot x_i}{n} = \frac{5 \cdot 40 + 6 \cdot 60 + 14 \cdot 80 + 15 \cdot 100 + 7 \cdot 120 + 3 \cdot 140}{50} = 88,80;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum n_{y_j} \cdot y_j}{n} = \frac{4 \cdot 160 + 8 \cdot 140 + 13 \cdot 120 + 13 \cdot 100 + 7 \cdot 80 + 5 \cdot 60}{50} = 109,60;$$

выборочные дисперсии

$$s_x^2 = \frac{\sum n_{x_i} \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{5 \cdot 40^2 + 6 \cdot 60^2 + 14 \cdot 80^2 + 15 \cdot 100^2 + 7 \cdot 120^2 + 3 \cdot 140^2}{50} - (88,80)^2 = 690,56;$$

$$s_y^2 = \frac{\sum n_{y_j} \cdot y_j^2}{n} - (\bar{y})^2 =$$

$$= \frac{4 \cdot 160^2 + 8 \cdot 140^2 + 13 \cdot 120^2 + 13 \cdot 100^2 + 7 \cdot 80^2 + 5 \cdot 60^2}{50} - (109,60)^2 = 771,84;$$

выборочные средние квадратические отклонения

$$s_x = \sqrt{690,56} \approx 26,28; s_y = \sqrt{771,84} \approx 27,78;$$

выборочный корреляционный момент

$$K_{xy} = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} =$$

$$= \frac{1}{50} (1 \cdot 120 \cdot 160 + 3 \cdot 140 \cdot 160 + 3 \cdot 100 \cdot 140 + 5 \cdot 120 \cdot 140 + 4 \cdot 80 \cdot 120 +$$

$$+ 8 \cdot 100 \cdot 120 + 1 \cdot 120 \cdot 120 + 2 \cdot 60 \cdot 100 + 7 \cdot 80 \cdot 100 + 1 \cdot 40 \cdot 80 + 3 \cdot 60 \cdot 80 +$$

$$+ 3 \cdot 80 \cdot 80 + 4 \cdot 40 \cdot 60 + 1 \cdot 60 \cdot 60) - 88,80 \cdot 109,60 = 651,52;$$

выборочный коэффициент корреляции

$$r = \frac{K_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{651,52}{26,28 \cdot 27,28} \approx 0,89.$$

2. Проверим значимость полученного выборочного коэффициента корреляции по t -критерию Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,89\sqrt{50-2}}{\sqrt{1-(0,89)^2}} \approx 13,52.$$

По таблицам квантилей распределения Стьюдента по наиболее употребляемому в технике уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $\nu = n - 2 = 50 - 2 = 48$ находим критическое значение критерия Стьюдента

$$t_{\text{кр}} = t_{\alpha; \nu} = t_{0,05; 48} = 2,02.$$

Так как $t_{\text{набл}} = 13,52 > t_{\text{кр}} = 2,02$, то выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля.

По таблице Чеддока (табл. Пб) определяем, что связь между исследуемыми величинами X и Y высокая.

3. Для подтверждения линейной регрессионной зависимости между исследуемыми величинами X и Y построим диаграмму рассеяния. Изобразим результаты измерений (x_i, y_j) в виде точек в декартовой системе координат (Рис. 4). Расположение точек на диаграмме рассеяния подтверждает гипотезу о наличии линейной регрессионной зависимости между пределом текучести (X) и пределом прочности (Y).

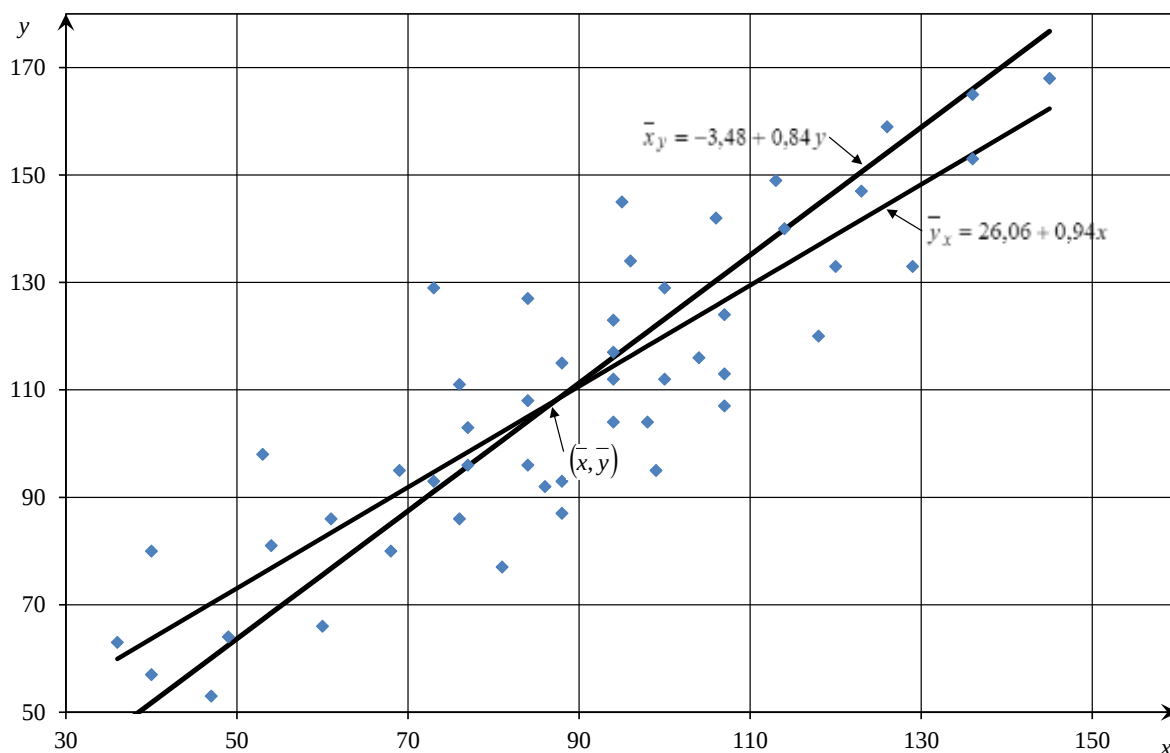


Рис. 4

4. Найдём эмпирические линейные уравнения регрессии Y на X :

$$\bar{y}_x = \bar{y} + r_B \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}) = 109,60 + 0,89 \frac{27,78}{26,28} (x - 88,80);$$

$$\bar{y}_x = 26,06 + 0,94x;$$

и X на Y :

$$\bar{x}_y = \bar{x} + r_B \frac{s_x}{s_y} (y - \bar{y}) = 88,80 + 0,89 \frac{26,28}{27,78} (y - 190,60);$$

$$\bar{x}_y = -3,48 + 0,84y.$$

Контроль вычислений по формуле (7):

$$\sqrt{\rho_{xy} \cdot \rho_{yx}} = \sqrt{0,94 \cdot 0,84} \approx 0,89 = r_B.$$

Графики найденных эмпирических функций построены на рис. 4.

ПРИМЕРНЫЙ СПИСОК ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "МАТЕМАТИКА" (2 КУРС, 3 СЕМЕСТР)

Раздел «Теория вероятностей»

1. Пространство элементарных событий.
2. Классическое определение вероятности события.
3. Основные формулы комбинаторики.
4. Геометрические вероятности.
5. Теорема умножения вероятностей.
6. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
7. Вероятность наступления хотя бы одного события.
8. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
9. Формула полной вероятности.
10. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса.
11. Независимые испытания. Формула Бернулли.
12. Локальная теорема Лапласа.
13. Формула Пуассона.
14. Интегральная теорема Лапласа.
15. Закон больших чисел.
16. Дискретные случайные величины: основные понятия.
17. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Вероятностный смысл математического ожидания. Свойства математического ожидания.
18. Дисперсия дискретной случайной величины. Свойства дисперсии ДСВ. Среднее квадратическое отклонение.
19. Начальные и центральные теоретические моменты.
20. Непрерывная случайная величина. Функция распределения.
21. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
22. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Асимметрия и эксцесс.
23. Равномерное распределение. Показательное распределение.
24. Нормальное распределение.
25. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.
26. Вероятность заданного отклонения. Правило «трех сигм».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1

$$\text{ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ } P(x = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

$m \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004
$m \backslash a$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7				0,0001	0,0034	0,0216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10						0,0008
11						0,0002
12						0,0001
$m \backslash a$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		0,0022	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17			0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18				0,0002	0,0009	0,0029
19					0,0004	0,0014
20					0,0002	0,0006
21						0,0001

$$\text{ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ } P(m \leq k) = \sum_{m=0}^k \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

$k \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9983	0,9966
4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996
5				1,0000	1,0000	1,0000
$k \backslash a$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358	0,4060	0,1991
2	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197	0,6767	0,4232
3	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810	0,8571	0,6472
4	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963	0,9473	0,8153
5	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9834	0,9161
6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9955	0,9665
7				1,0000	0,9989	0,9881
8					0,9998	0,9962
9					1,0000	0,9989
10						0,9997
11						0,999
12						1,0000
$k \backslash a$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012
2	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062
3	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212
4	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550
5	0,7851	0,6160	0,4457	0,3008	0,1912	0,1157
6	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3133	0,2068
7	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239
8	0,9786	0,9318	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557
9	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874
10	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060
11	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030
12	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758
13	1,0000	0,9992	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261
14		0,9998	0,9986	0,9943	0,9837	0,9585
15		1,0000	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780
16			0,9998	0,9990	0,9963	0,9889
17			0,9999	0,9996	0,9984	0,9947
18			1,0000	0,9999	0,9994	0,9976
19				1,0000	0,9997	0,9989
20					0,9999	0,9996
21					1,0000	0,9998

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ И $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
0,01	0,3989	0,0040	0,41	0,3668	0,1591	0,81	0,2874	0,2910
0,02	0,3989	0,0080	0,42	0,3653	0,1628	0,82	0,2850	0,2939
0,03	0,3988	0,0120	0,43	0,3637	0,1664	0,83	0,2827	0,2967
0,04	0,3986	0,0160	0,44	0,3621	0,1700	0,84	0,2803	0,2995
0,05	0,3984	0,0199	0,45	0,3605	0,1736	0,85	0,2780	0,3023
0,06	0,3982	0,0239	0,46	0,3589	0,1772	0,86	0,2756	0,3051
0,07	0,3980	0,0279	0,47	0,3572	0,1808	0,87	0,2732	0,3078
0,08	0,3977	0,0319	0,48	0,3555	0,1844	0,88	0,2709	0,3106
0,09	0,3973	0,0359	0,49	0,3538	0,1879	0,89	0,2685	0,3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
0,11	0,3965	0,0438	0,51	0,3503	0,1950	0,91	0,2637	0,3186
0,12	0,3961	0,0478	0,52	0,3485	0,1985	0,92	0,2613	0,3212
0,13	0,3956	0,0517	0,53	0,3467	0,2019	0,93	0,2589	0,3238
0,14	0,3951	0,0557	0,54	0,3448	0,2054	0,94	0,2565	0,3264
0,15	0,3945	0,0596	0,55	0,3429	0,2088	0,95	0,2541	0,3289
0,16	0,3939	0,0636	0,56	0,3410	0,2123	0,96	0,2516	0,3315
0,17	0,3932	0,0675	0,57	0,3391	0,2157	0,97	0,2492	0,3340
0,18	0,3925	0,0714	0,58	0,3372	0,2190	0,98	0,2468	0,3365
0,19	0,3918	0,0753	0,59	0,3352	0,2224	0,99	0,2444	0,3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
0,21	0,3902	0,0832	0,61	0,3312	0,2291	1,01	0,2396	0,3438
0,22	0,3894	0,0871	0,62	0,3292	0,2324	1,02	0,2371	0,3461
0,23	0,3885	0,0910	0,63	0,3271	0,2357	1,03	0,2347	0,3485
0,24	0,3876	0,0948	0,64	0,3251	0,2389	1,04	0,2323	0,3508
0,25	0,3867	0,0987	0,65	0,3230	0,2422	1,05	0,2299	0,3531
0,26	0,3857	0,1026	0,66	0,3209	0,2454	1,06	0,2275	0,3554
0,27	0,3847	0,1064	0,67	0,3187	0,2486	1,07	0,2251	0,3577
0,28	0,3836	0,1103	0,68	0,3166	0,2517	1,08	0,2227	0,3599
0,29	0,3825	0,1141	0,69	0,3144	0,2549	1,09	0,2203	0,3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
0,31	0,3802	0,1217	0,71	0,3101	0,2611	1,11	0,2155	0,3665
0,32	0,3790	0,1255	0,72	0,3079	0,2642	1,12	0,2131	0,3686
0,33	0,3778	0,1293	0,73	0,3056	0,2673	1,13	0,2107	0,3708
0,34	0,3765	0,1331	0,74	0,3034	0,2703	1,14	0,2083	0,3729
0,35	0,3752	0,1368	0,75	0,3011	0,2734	1,15	0,2059	0,3749
0,36	0,3739	0,1406	0,76	0,2989	0,2764	1,16	0,2036	0,3770
0,37	0,3725	0,1443	0,77	0,2966	0,2794	1,17	0,2012	0,3790
0,38	0,3712	0,1480	0,78	0,2943	0,2823	1,18	0,1989	0,3810
0,39	0,3697	0,1517	0,79	0,2920	0,2852	1,19	0,1965	0,3830

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
1,71	0,1919	0,3869	1,71	0,0925	0,4564	2,42	0,0213	0,4922
1,77	0,1895	0,3888	1,72	0,0909	0,4573	2,44	0,0203	0,4927
1,73	0,1872	0,3907	1,73	0,0898	0,4582	2,46	0,0194	0,4931
1,74	0,1849	0,3925	1,74	0,0878	0,4591	2,48	0,0184	0,4934
1,75	0,1825	0,3944	1,75	0,0863	0,4599	2,50	0,0175	0,4938
1,76	0,1804	0,3962	1,76	0,0848	0,4608	2,52	0,0167	0,4941
1,77	0,1781	0,3980	1,77	0,0833	0,4616	2,54	0,0158	0,4945
1,78	0,1758	0,3997	1,78	0,0818	0,4625	2,56	0,0151	0,4948
1,79	0,1736	0,4015	1,79	0,0804	0,4633	2,58	0,0143	0,4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0135	0,4953
1,31	0,1691	0,4049	1,81	0,0775	0,4649	2,62	0,0129	0,4955
1,32	0,1669	0,4066	1,82	0,0761	0,4656	2,64	0,0122	0,4959
1,33	0,1647	0,4082	1,83	0,0748	0,4664	2,66	0,0116	0,4961
1,34	0,1626	0,4099	1,84	0,0734	0,4671	2,68	0,0110	0,4963
1,35	0,1604	0,4115	1,85	0,0721	0,4678	2,70	0,0104	0,4965
1,36	0,1582	0,4131	1,86	0,0707	0,4686	2,72	0,0099	0,4967
1,37	0,1561	0,4147	1,87	0,0694	0,4693	2,74	0,0093	0,4969
1,38	0,1539	0,4162	1,88	0,0681	0,4699	2,76	0,0088	0,4971
1,39	0,1518	0,4177	1,89	0,0669	0,4706	2,78	0,0084	0,4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
1,41	0,1476	0,4207	1,91	0,0644	0,4719	2,82	0,0075	0,4976
1,42	0,1456	0,4222	1,92	0,0632	0,4726	2,84	0,0071	0,4977
1,43	0,1435	0,4236	1,93	0,0620	0,4732	2,86	0,0067	0,4979
1,44	0,1415	0,4251	1,94	0,0608	0,4738	2,88	0,0063	0,4980
1,45	0,1394	0,4265	1,95	0,0596	0,4744	2,90	0,0060	0,4981
1,46	0,1374	0,4279	1,96	0,0584	0,4750	2,92	0,0056	0,4982
1,47	0,1354	0,4292	1,97	0,0573	0,4756	2,94	0,0053	0,4984
1,48	0,1334	0,4306	1,98	0,0562	0,4761	2,96	0,0050	0,4985
1,49	0,1315	0,4319	1,99	0,0551	0,4767	2,98	0,0047	0,4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
1,51	0,1276	0,4345	2,02	0,0519	0,4783	3,10	0,00327	0,49903
1,52	0,1257	0,4357	2,04	0,0498	0,4793	3,20	0,00238	0,49931
1,53	0,1238	0,4370	2,06	0,0478	0,4803	3,30	0,00172	0,49952
1,54	0,1219	0,4382	2,08	0,0459	0,4812	3,40	0,00123	0,49966
1,55	0,1200	0,4394	2,10	0,0440	0,4821	3,50	0,00087	0,49977
1,56	0,1182	0,4406	2,12	0,0422	0,4830	3,60	0,00061	0,49984
1,57	0,1163	0,4418	2,14	0,0404	0,4838	3,70	0,00042	0,49989
1,58	0,1145	0,4429	2,16	0,0387	0,4846	3,80	0,00029	0,49993
1,59	0,1127	0,4441	2,18	0,0371	0,4854	3,90	0,00020	0,49995
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	4,00	0,0001338	0,499968
1,61	0,1092	0,4463	2,22	0,0339	0,4868	4,50	0,0000160	0,499997
1,62	0,1074	0,4474	2,24	0,0325	0,4875	5,00	0,0000015	0,49999997
1,63	0,1057	0,4484	2,26	0,0310	0,4881			
1,64	0,1040	0,4495	2,28	0,0297	0,4887			
1,65	0,1023	0,4505	2,30	0,0283	0,4893			
1,66	0,1006	0,4515	2,32	0,0270	0,4898			
1,67	0,0989	0,4525	2,34	0,0258	0,4904			
1,68	0,0973	0,4535	2,36	0,0246	0,4909			
1,69	0,0957	0,4545	2,38	0,0235	0,4913			

Таблица П.4

КОЭФФИЦИЕНТ ДОВЕРИЯ $t_{\alpha;v}$
ДЛЯ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ v
И УРОВНЯ ЗНАЧИМОСТИ α

v	α			v	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,31	12,71	63,66	14	1,76	2,15	2,98
2	2,92	4,30	9,92	16	1,75	2,12	2,91
3	2,35	3,18	5,84	18	1,73	2,10	2,88
4	2,13	2,78	4,60	20	1,73	2,09	2,85
5	2,02	2,57	4,03	22	1,72	2,07	2,82
6	1,94	2,45	3,71	24	1,71	2,06	2,80
7	1,90	2,37	3,50	26	1,71	2,06	2,78
8	1,86	2,31	3,36	28	1,70	2,05	2,76
9	1,83	2,26	3,25	30	1,70	2,04	2,75
10	1,81	2,23	3,17	40	1,68	2,02	2,70
11	1,80	2,20	3,11	60	1,67	2,00	2,66
12	1,78	2,18	3,06	120	1,66	1,98	2,62
13	1,77	2,16	3,02	∞	1,66	1,96	2,58

Таблица П.5

χ^2 -РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

v	α			v	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6,63	16	23,54	26,30	32,00
2	4,61	5,99	9,21	17	24,77	27,59	33,41
3	6,25	7,81	11,34	18	25,99	28,87	34,81
4	7,78	9,49	13,28	19	27,20	30,14	36,19
5	9,24	11,07	15,09	20	28,41	31,41	37,57
6	10,64	12,59	16,81	21	29,62	32,67	38,93
7	12,02	14,07	18,48	22	30,81	33,92	40,29
8	13,36	15,51	20,09	23	32,01	35,17	41,64
9	14,68	16,92	21,67	24	33,20	36,42	42,98
10	15,99	18,31	23,21	25	34,38	37,65	44,31
11	17,28	19,68	24,72	26	35,56	38,89	45,64
12	18,55	21,03	26,22	27	36,74	40,11	46,96
13	19,81	22,36	27,69	28	37,92	41,34	48,28
14	21,06	23,68	29,14	29	39,09	42,56	49,59
15	22,31	25,00	30,58	30	40,26	43,77	50,89

Таблица 6

ТАБЛИЦА ЧЕДДОКА

Диапазон изменения $ r_B $:	<0,3	0,3—0,5	0,5—0,7	0,7—0,9	>0,9
Характер тесноты связи	Слабая	Умеренная	Заметная	Высокая	Весьма высокая

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Понятия, обозначения	Содержание, формула
1	2
Перестановки. Число перестановок	Соединения, отличающиеся только порядком элементов, называются перестановками. Число перестановок из n элементов $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ $0! = 1$
Размещения. Число размещений	Соединения из n различных элементов по m , отличающихся друг от друга составом элементов либо их порядком, называются размещениями. Число размещений из n по m $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
Сочетания. Число сочетаний	Соединения из n различных элементов по m , отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом, называются сочетаниями. Число сочетаний из n по m $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ $C_n^m = C_n^{n-m};$ $C_n^0 = 1; C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1};$ $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$
Стохастический эксперимент	Это опыт (испытание), результат которого заранее не определен
Достоверное событие	Результат, который обязательно наступает при осуществлении данного комплекса условий (опыта, эксперимента) называется достоверным событием
Случайное событие	Это событие, которое может произойти, а может и не произойти в данном испытании
Невозможное событие	Это событие, которое не может произойти при данном комплексе условий
Относительная частота события A	Отношение $\nu(A) = \frac{m}{n}$ числа экспериментов m , завершившихся событием A , к общему числу n проведенных экспериментов

1	2
Статистическое определение вероятности	Если при неограниченном увеличении числа экспериментов относительная частота события $\nu(A)$ стремится к некоторому фиксированному числу, то событие A стохастически устойчиво и это число $p(A)$ называют вероятностью события A
Определение вероятности в классической схеме	$P(A) = \frac{m}{n}$, где m — число исходов стохастического эксперимента, благоприятствующих наступлению события A , n — общее число всех равновозможных исходов
Вероятность суммы (объединения), двух событий A и B	$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
Вероятность произведения двух зависимых событий A и B	$P(AB) = P(A) \cdot P(B A) = P(B) \cdot P(A B)$, где $P(B A)$ — условная вероятность события B при условии, что событие A с ненулевой вероятностью произошло
Независимые события A и B	Это такие события, для которых $P(B A) = P(B)$ и $P(A B) = P(A)$. Следовательно, $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
Схема Бернулли	Стохастический эксперимент состоит из последовательности n независимых и одинаковых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A или событие, ему противоположное $\bar{A}$ с вероятностями соответственно равными p и $q = 1 - p$
Формула Бернулли	Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появится ровно m раз $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ Вероятность того, что при n испытаниях A появляется не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле: $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$
Формула Пуассона	При достаточно большом n и малом p (если $a = np < 10$) $P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ (таблица П1) $P_n(m \leq k) \approx e^{-a} \sum_{m=0}^k \frac{a^m}{m!}$ (таблица П2)

1	2
Локальная формула Муавра-Лапласа	При достаточно большом n и не слишком малых p и q $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}};$ $\varphi(-x) = \varphi(x) \text{ (таблица ПЗ)}$
Интегральная формула Муавра — Лапласа	$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$ где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$ $\Phi(-x) = -\Phi(x) \text{ (таблица П4)}$
Понятие случайной величины	Случайной величиной называют переменную величину, которая принимает числовые значения в зависимости от исходов испытания случайным образом.
Понятие дискретной случайной величины (ДСВ X)	ДСВ X — случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, то есть численные значения которой образуют конечное или счетное множество.
Закон распределения дискретной случайной величины	Соответствие между значениями $x_1, x_2, \dots$ дискретной случайной величины и их вероятностями $p_1, p_2, \dots$ называется законом распределения и может быть задан таблично или аналитически (то есть с помощью формул). Если ДСВ X принимает конечное множество значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, то ее закон распределения определяется формулами $P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ и } \sum_{k=1}^n p_k = 1$ Если ДСВ X принимает бесконечную последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \dots$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots$, то ее закон распределения определяется формулами $P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$
Понятие непрерывной случайной величины (НСВ X)	НСВ X — случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого промежутка, то есть множество значений непрерывной случайной величины несчетно.

1	2
Функция распределения. Свойства функции распределения	Функцией распределения случайной величины X называется функция действительного переменного x, определяемая равенством $F(x) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньше x. Функция распределения $F(x)$ для ДСВ X, которая может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ имеет вид $F(x) = \sum_{x_k < x} P(X < x_k),$ где символ $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности p_k тех значений, которые меньше x. Функция является разрывной. Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ является непрерывно дифференцируемой. Вероятность того, что СВХ примет значение из промежутка $[\alpha; \beta)$, равна разности значений ее функции распределения на концах этого полуинтервала: $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ Свойства функции распределения $0 \leq F(x) \leq 1$ - Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$, то есть функция распределения является неубывающей. - Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0); \quad F(x_0 - 0) = F(x_0)$ - Если все возможные значения СВХ принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$, $F(x) = 1$ при $x \geq b$ - Если все возможные значения СВХ принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty; +\infty)$, то $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$

1	2
Функция распределения. Свойства функции распределения	Если X — непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно заданное определенное значение, равна нулю: $P(X = \alpha) = 0$ Отсюда следует, что для непрерывной случайной величины выполняются равенства: $P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Свойства функции плотности распределения.	Плотностью распределения (дифференциальной функцией распределения) вероятностей НСВ X в точке x называют предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x; x + \Delta x)$ к длине Δx этого интервала, когда последняя стремится к нулю: $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$ Следовательно, $f(x) = F'(x)$, то есть плотность распределения есть первая производная от функции распределения НСВХ. Вероятность того, что НСВХ примет значение, принадлежащее интервалу $(a; b)$, определяется равенством $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$ Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$ Свойства функции плотности 1. Плотность распределения $f(x)$ — неотрицательная функция, то есть $f(x) \geq 0$. 2. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty; +\infty)$ от функции плотности вероятностей равен единице: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. 3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha; \beta]$, то $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$, так как вне этого промежутка $f(x) = 0$.

1	2
Математическое ожидание	Для ДСВ X равно сумме произведений всех ее значений на соответствующие вероятности: $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$. Для НСВ X: $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, где $f(x) = F'(x)$ — функция плотности распределения вероятности.
Свойства математического ожидания	1) $M(C) = C$, если $C = const$, 2) $M(CX) = CM(X)$, 3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, 4) Если X и Y — независимые случайные величины, то $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.
Дисперсия случайной величины	Разность $X - M(X)$ называется отклонением случайной величины X от ее математического ожидания $M(X) = a$. Математическое ожидание отклонения равно нулю: $M(X - a) = 0$ Дисперсией, или рассеянием случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения: $D(X) = M((X - a)^2)$. Следовательно, для любой случайной величины X: $D(X) \geq 0$
Свойства дисперсии	1) $D(C) = 0$, $C = const$, 2) $D(CX) = C^2 D(X)$, $C = const$, 3) Если случайные величины X и Y независимы, то $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, 4) $D(XY) = D(X) \cdot D(Y)$, 5) $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.
Среднеквадратическое отклонение	Среднеквадратическим отклонением, или стандартным отклонением, случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \Leftrightarrow D(X) = \sigma^2$.

1	2
Биномиальное распределение	Закон распределения дискретной случайной величины, определяемой формулой Бернулли $p_k = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ называется биномиальным. Постоянные n, p называются параметрами биномиального распределения ($q = 1 - p$). $M(X) = np; D(X) = npq; \sigma(X) = \sqrt{npq}$
Распределение Пуассона	Распределением Пуассона называется распределение вероятностей дискретной случайной величины, определяемое формулой Пуассона $P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$, где $a = np$ — параметр распределения. $M(X) = a; D(X) = a.$
Равномерное распределение на интервале $(a; b)$	Если значения случайной величины, которые она принимает в конечном промежутке $(a; b)$, возможны в одинаковой степени, то плотность распределения вероятностей этой величины постоянна на данном промежутке и равна нулю вне этого промежутка, то есть $f(x) = \begin{cases} C & \text{на } [a, b], \\ 0 & \text{вне } (a, b). \end{cases}$ $C = \frac{1}{b-a}.$ $M(X) = \frac{a+b}{2}; D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Геометрическое распределение	Геометрическим называется распределение дискретной случайной величины X, определяемое формулой $P(X = m) = (1 - p)^{m-1} \cdot p$, где $0 < p < 1$, и $m = 1, 2, 3, \dots$ (Вероятности образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1 - p$). $M(X) = \frac{1}{p}; D(X) = \frac{1-p}{p^2}$

1	2
Показательное распределение	Показательным называется распределение с плотностью вероятностей, определяемой по формуле $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$ где $\lambda > 0$ - параметр распределения. $M(X) = \frac{1}{\lambda}; D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$ Замечание. Если T — время безотказной работы элемента, λ — интенсивность отказов, то случайная величина T распределена по экспоненциальному закону с функцией распределения $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где $\lambda > 0$. $F(t)$ определяет вероятность отказа элемента за время t. Вероятность безотказной работы элемента за время t равна $e^{-\lambda t}$. Функция $R(t) = e^{-\lambda t}$ называется функцией надежности.
Нормальное распределение $N(a; \sigma)$	Нормальным распределением, или распределением Гаусса, называется распределение с плотностью вероятностей $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ Постоянные a и σ ($\sigma > 0$) называются параметрами нормального распределения. $M(X) = a; D(X) = \sigma^2; \sigma = \sqrt{D(X)}$ Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервале $(\alpha; \beta)$ определяется формулой $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$ где $\Phi(x)$ — функция Лапласа. $M(X) = a; D(X) = \sigma^2.$
Нормированное распределение $N(0;1)$	Нормированным или стандартным называется такое нормальное распределение непрерывной случайной величины, когда функция плотности вероятностей $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$ $M(X) = a = 0; \sigma(X) = \sigma = 1.$

1	2
Мода случайной величины $\overline{M}$	Модой ДСВ X называется ее наиболее вероятное значение. Модой НСВ X называется то ее значение, при котором плотность распределения вероятностей максимальна.
Медиана M_e	Медианой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение M_e, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше M_e, то есть $P(x < M_e) = P(x > M_e) = 0,5$. Если прямая $x = a$ является осью симметрии кривой распределения $f(x)$, то $\overline{M} = M_e = M(X) = a$.
Начальные моменты ν_k	Начальным моментом ν_k k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени этой случайной величины: $\nu_k = M(X^k)$. Для ДСВ X: $\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i$, где $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Начальный момент k-го порядка НСВ X с плотностью распределения $f(x)$ определяется формулой: $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \text{ где } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$
Центральные моменты μ_k	Центральным моментом μ_k k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени отклонения этой величины от ее математического ожидания. Если обозначить $M(X) = a$, то $\mu_k = M((X - a)^k)$ Для ДСВ X: $\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^k \cdot p_i$, если множество этой величины конечно, а если — счетно, то $\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^k \cdot p_i$. Для НСВ X с плотностью распределения $f(x)$ центральный момент k-го порядка определяется формулой: $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a)^k \cdot f(x) dx.$

1	2
Некоторые свойства начальных и центральных моментов	$\nu_0 = 1; \nu_1 = M(X),$ $\mu_0 = 1; \mu_1 = 0; \mu_2 = D(X),$ $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$ $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$ $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$
Асимметрия	Отношение центрального момента 3-го порядка к кубу среднеквадратического отклонения случайной величины называется асимметрией: $A(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$ Если распределение случайной величины симметрично относительно ее математического ожидания, то асимметрия равна нулю.
Эксцесс	Эксцессом случайной величины называется величина $\mathcal{E}_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$ Для нормального распределения $\mathcal{E}_x = 0.$ Кривые, более островершинные по сравнению с нормальной кривой Гаусса, имеют $\mathcal{E}_x > 0.$ У более плосковершинных кривых $\mathcal{E}_x < 0.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1963.
2. Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. — М.: Высшая школа, 1966.
3. Гурский В.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. — МН.: Высшая школа, 1984.
4. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. — МН.: ТетраСистемс, 2002.
5. Колмагоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
6. Копылов Г.Н., Суханова Н.Н. Задачник по теории вероятностей. — Волгоград: ВолГУ, 1997.
7. Космачева И.М. Задачи теории вероятностей и математической статистики. — Астрахань: Гостехуниверситет, 2002.
8. Макарова Е.Л. Задачник — практикум по теории вероятностей. — Волгоград: Перемена, 2002.
9. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1960.
10. Студенецкая В.Н. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. — Волгоград: Учитель, 2005.
11. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1987.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Правила оформления и сдачи контрольных работ по курсу «Математика (спецглавы)»	1
Задания к типовому расчету (контрольной работе) по теории вероятностей	2
Задача 1.....	2
Задача 2.....	2
Задача 3.....	3
Задача 4.....	5
Задача 5.....	6
Задача 6.....	6
Задания к типовому расчету (контрольной работе) по математической статистике	9
Задача 1.....	9
Задача 2.....	10
Задача 3.....	11
Указания к решению задач типового расчета по математической статистике.....	13
Приложения	28
Значения функции $P(x = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$	28
Значения функции $P(m \leq k) = \sum_{m=0}^k \frac{a^m}{m!} e^{-a}$	29
Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	30
Коэффициент доверия $t_{\alpha;v}$ для заданных значений числа степеней свободы v и уровня значимости α	32
χ^2 -распределение.....	32
Таблица Чеддока	32
Справочные материалы для решения задач.....	33
Список литературы	43