

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА «ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ ХИМИЧЕСКИХ И ПИЩЕВЫХ
ПРОИЗВОДСТВ»

А. А. Шагарова, П. С. Васильев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ



Волгоград
2018

УДК 66.01 (075)

Рецензент:

канд. хим. наук, доцент *В. А. Козловцев*

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Методические указания к практическим и лабораторным работам: метод. указания / сост. А. А. Шагарова, П. С. Васильев. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2018. – 22 с.

В методических указаниях содержатся теоретические и методологические основы расчетных работ, связанных с использованием численных методов при приближенном решении неявных уравнений с одним неизвестным. Методические указания содержат набор индивидуальных вариантов заданий для выполнения студентами практических и лабораторных работ по дисциплинам «Моделирование энерго- и ресурсосберегающих процессов в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии» и «Моделирование процессов и систем». Приводится пример выполнения задания. Предназначены для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения по направлениям 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии» и 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»

Ил. 5. Табл. 2. Библиогр.: 7 назв.

© Волгоградский государственный
технический университет, 2018

Содержание

	Введение	4
1.	Основные этапы разработки математической модели	5
2.	Численные методы решения уравнений с одним неизвестным	6
3.	Задание практической (контрольной) работы	10
4.	Пример выполнения задания	15
5.	Контрольные вопросы	21
	Список рекомендуемой литературы для самостоятельного изучения	22

Введение

Одной из особенностей современных исследований стала математизация физического познания, т.е. интенсивное применение методом математического моделирования. Математическое моделирование – это, по существу, определение свойств и характеристик рассматриваемого явления (процесса) путем решения (как правило, с помощью ЭВМ) системы уравнений, описывающих этот процесс, - математической модели. При этом очень важно составить модель так, чтобы она достаточно точно отражала свойства рассматриваемого процесса и в то же время была доступна для исследования.

Математическая модель представляет собой совокупность математических уравнений, описывающих сущность явлений, протекающих в объекте моделирования. Решение этой системы с помощью определенного алгоритма позволяет прогнозировать поведение объекта при изменении технологических параметров. Математическая модель, как правило, реализуется на ЭВМ.

Математическое моделирование является очень недорогим инструментом для оценки любых новаторских конструкций, любых новых композиций с гипотетическими свойствами, причем такая оценка не требует дополнительных материальных затрат на создание прототипов или масштабных пилотных установок.

В методических указаниях представлено краткое описание распространенных численных методов приближенного решения уравнений с одним неизвестным. Подбор численных методов связан с кругом прикладных задач, наиболее часто встречающихся специалистам в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии. Выполнение расчетных заданий требует от студентов знания языков программирования, некоторых навыков программирования, знания основ курсов высшей математики и теплопередачи.

Решение предложенных задач позволит студентам закрепить теоретические знания по дисциплинам «Моделирование энерго- и ресурсосберегающих процессов в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», «Моделирование процессов и систем» и получить практические навыки составления алгоритмов, разработки и отладки прикладных программ с использованием приведенных в методических указаниях методов.

1. Основные этапы разработки математической модели

Математическое моделирование технологического процесса включает в себя несколько этапов.

1. Постановка задачи.

На этом этапе формируется цель моделирования, исходные данные для достижения поставленной задачи.

2. Математическое описание объекта моделирования.

На этом этапе разрабатывается система уравнений, описывающая все явления и закономерности, которые необходимо учитывать для достижения поставленной цели моделирования.

3. Разработка алгоритма решения.

На этом этапе разрабатывается последовательность (порядок) действий при решении системы уравнений математического описания модели.

4. Формирование таблицы соответствия переменных математического описания и машинных идентификаторов.

На этом этапе каждой переменной, входящей в уравнения математического описания, ставится в соответствие идентификатор, который будет использоваться для обозначения этой переменной в программе на алгоритмическом языке.

5. Разработка программы для ЭВМ на алгоритмическом языке.

На этом этапе вся последовательность действий, разработанная на этапе 3, записывается в операторах алгоритмического языка с использованием идентификаторов переменных в соответствии с этапом 4.

6. Численный эксперимент на математической модели.

На этом этапе в ЭВМ вводятся исходные данные, и производится расчет моделируемого процесса с получением значений неизвестных переменных.

В результате выполнения каждой работы должен быть составлен отчет, который должен содержать:

- название и цель работы;
- описание задачи и исходных данных;
- алгоритм решения задачи;
- листинг программы;
- результаты численного решения (при необходимости, представленные в виде таблиц или графиков);
- заключение по работе.

2. Численные методы решения уравнений с одним неизвестным

В математическое описание процесса могут входить различные уравнения: обыкновенные алгебраические, трансцендентные, обыкновенные дифференциальные, дифференциальные в частных производных и т.д. Зачастую эти уравнения нельзя решить аналитически. Поэтому для их решения разработаны различные численные методы.

Существует большое число уравнений с одним неизвестным, которые не могут быть разрешены в явном виде (нелинейные алгебраические, трансцендентные уравнения). В таких случаях находят приближенные значения корней уравнения с помощью различных численных методов. К наиболее простым и часто используемым методам относятся:

- метод дихотомии (деления отрезка пополам);
- метод простых итераций;
- метод касательных Ньютона;
- метод секущих

Решаемое уравнение может иметь на интервале $[x_0, x_1]$ как один единственный корень x , так и несколько корней. В этом случае необходимо провести предварительное исследование уравнения, которое разбивается на несколько этапов:

- 1) исследование количества, характера и расположения корней;
- 2) нахождение приближенного значения корней;
- 3) выбор интересующих значений и определение их с требуемой точностью.

Первый и второй этапы решаются аналитическими и графическими методами, например, посредством табуляции функции и построения ее приближенного графика. Для этого функция приводится к виду $f(x)=0$. Точки пересечения графика $f(x)$ с осью абсцисс дают искомые значения корней исходного уравнения. Приближенные значения корней уравнения уточняются итерационными методами.

Наиболее простым методом решения нелинейных алгебраических уравнений с одним неизвестным является метод простых итераций или пошаговый метод, который наиболее наглядно отражает сущность итерационных методов, поэтому подробно рассмотрим его сущность.

Метод простых итераций

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$. Необходимо найти такое значение x , при котором y будет равен нулю. Иначе говоря, необходимо найти корень уравнения $f(x) = 0$.

Допустим, заданная функция $y = f(x)$ в координатах $y - x$ имеет вид кривой представленной на рис.1. Корень уравнения будет лежать на пересечении графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс.

Идея поиска корня уравнения $f(x) = 0$ пошаговым методом заключается в следующем.

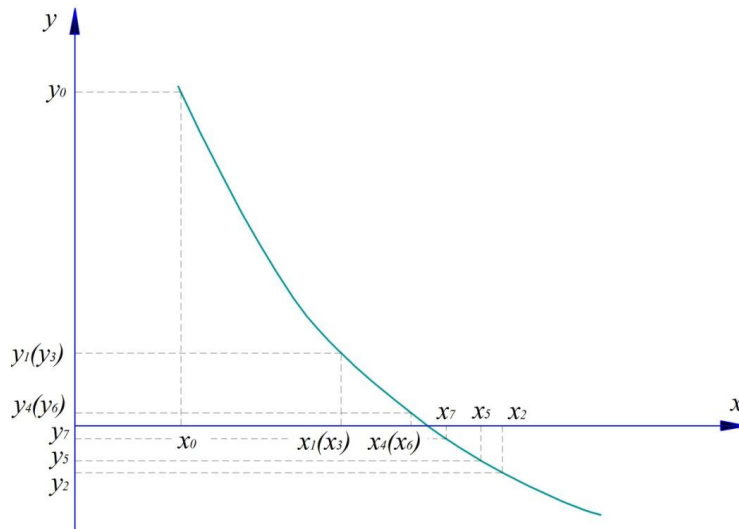


Рис.1. Графическая интерпретация метода простых итераций (пошагового метода)

Произвольно задаются начальным значением $x = x_0$, например, заведомо меньшим, чем значение корня. Рассчитывают при этом значении x значение функции $y_0 = f(x_0)$ и запоминают его.

Увеличивают значение x на некоторую наперед заданную величину шага H , т.е. $x = x + H$.

При этом значении x снова рассчитывают функцию $y = f(x)$.

Сравнивают знаки функций y и y_0 . Если знаки совпадают, то это означает, что корень еще не достигнут, и переменную x увеличивают на величину шага H , снова рассчитывают значение функции $y = f(x)$ и сравнивают знаки вновь рассчитанного значения y с y_0 . Если знаки y и y_0 совпадают, вновь увеличивают значение $x = x + H$. И так до тех пор, пока не получат значение y , знак которого отличается от y_0 .

Различие знака y и y_0 означает, что значение переменной x стало больше значения корня. Поэтому переменную x уменьшают на величину шага H , $x = x - H$, т.е. возвращаются в предыдущую точку. Уменьшают величину шага в N раз, $H = H/N$, и с новым значением шага увеличивают значение переменной x , $x = x + H$. Рассчитывают значение функции $y = f(x)$, сравнивают знаки y и y_0 . Если они совпадают, снова увеличивают значение x на величину шага H , и повторяют всю предыдущую процедуру, пока не получат значение y , знак которого отличается от знака y_0 .

При этом опять возвращаются в предыдущую точку $x = x - H$, уменьшают шаг $H = H/N$ и процесс повторяют. Эту процедуру повторяют до тех пор, пока величина шага не станет меньше наперед заданного числа ε , $H < \varepsilon$. Число ε называется точностью поиска корня. Последнее значение x считается искомым значением корня с точностью ε .

Примечание. При произвольном задании начального значения x и x_0 , заведомо большем, чем значение корня, процедура поиска корня остается неизменной. Однако при этом шаг H должен быть отрицательным числом.

Метод дихотомии. При реализации этого метода необходимо задать интервал $[x_0, x_1]$ значений x , на котором определяется корень уравнения. Необходимое условие выбора интервала заключается в том, что функция $f(x)$ на этом интервале должна менять свой знак только один раз.

Последующие действия сводятся к отысканию значений функции на границе интервала $[x_0, x_1]$ и в среднем его значении, т.е. $f(x_0)$, $f(x_1)$ и $f(x_2)$, где $x_2 = (x_0 + x_1)/2$. В случае, если функция изменяет свой знак на участке $[x_0, x_2]$, то для дальнейшего уточнения корня выбирается этот участок, для чего принимается что $x_1 = x_2$, и все действия повторяются. В противном случае, если функция меняет свой знак на участке $[x_2, x_1]$, то принимается, что $x_0 = x_2$ и все действия повторяются для этого участка.

Итерационные действия выполняются до тех пор, пока значение функции $f(x_2)$ не будет отличаться от 0 на величину меньшую наперед заданной точности поиска корня, или при заданной точности вычислений корня ϵ длина отрезка $[x_0, x_1]$ составит менее 2ϵ .

Суть метода поясняется графически на рисунке 2.

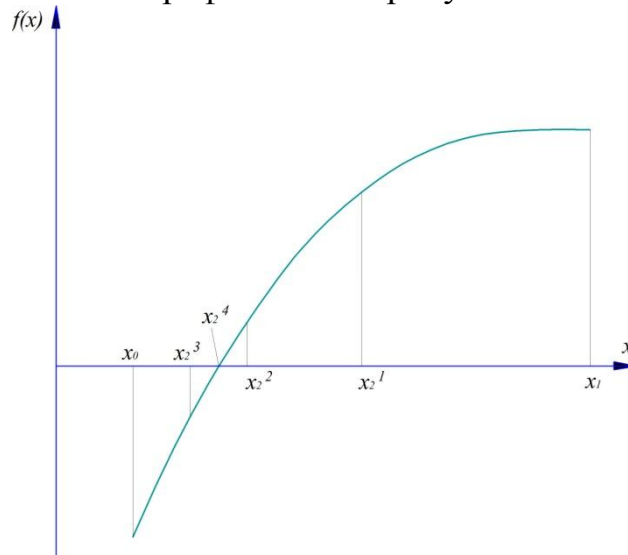


Рис. 2. Графическая интерпретация метода дихотомии

Примечание: Верхние индексы переменных обозначают номер итерации

Метод касательных (Ньютона) Если x есть некоторое приближение к корню x , а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то приближения можно определять по формуле (1):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1)$$

Последняя зависимость является итерационной формулой Ньютона. Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, если $\varphi_x = x - [f(x)/f'(x_n)]$. При произвольном нулевом приближении итерации сходятся в том случае, если всюду $|f''| \leq (f')^2$, в противном случае сходимость будет не при любом нулевом приближении, а толь-

ко в некоторой окрестности корня. Признак окончания расчета аналогичен методу простых итераций.

Графическая интерпретация метода представлена на рисунке 3.

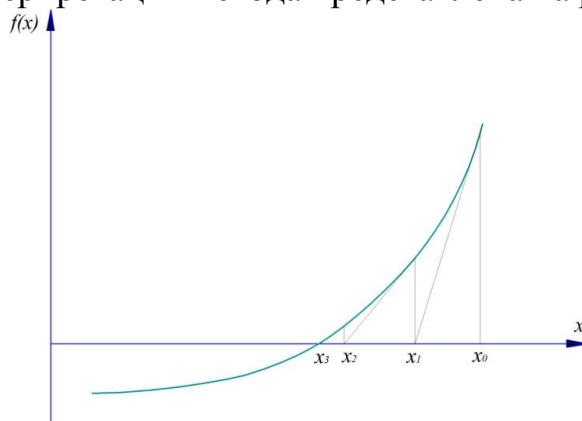


Рис.3. Графическое изображение метода касательных (Ньютона)

Метод секущих. При использовании метода Ньютона требуется вычислять производную функции, что не всегда возможно. Можно заменить производную первой конечной разностью, найденной по двум последним итерациям, т.е. в графическом изображении метода заменить касательную секущей. Итерационная формула в этом случае примет вид уравнения (2):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (2)$$

Для начала процесса поиска корня необходимо задать не одно нулевое приближение, а два (x_0 и x_1). Такие процессы, где для вычисления очередного приближения используются два предыдущих, называются двухшаговыми.

Эти небольшие изменения сильно влияют на характер итераций. Сходимость их может быть немонойтонной не только вдали от корня, но и в малой окрестности. Графическое изображение метода представлено на рисунке 4.

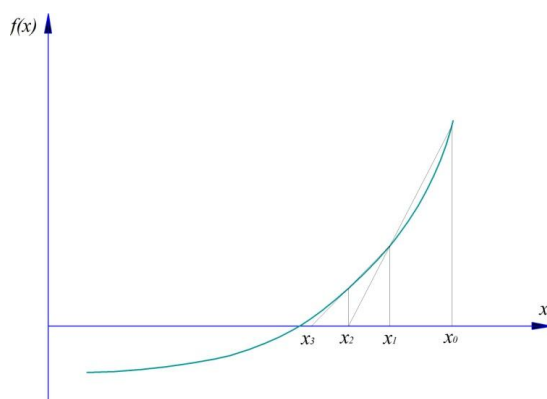


Рис.4. Графическое изображение метода секущих

3. Задание практической (контрольной) работы

Разработать математическую модель процесса теплообмена, позволяющую находить один из параметров процесса в соответствии с вариантом задания (табл. 1). Для поиска параметра использовать пошаговый метод решения нелинейных уравнений с одним неизвестным. Шаг поиска – H , делитель шага – N , точность поиска – ε .

Разработку модели осуществляют в последовательности:

- а) постановка задачи;
- б) математическое описание задачи;
- в) алгоритм решения задачи;
- г) программа решения задачи на алгоритмическом языке (Бейсик или Паскаль);
- д) расчет по программе в соответствии с заданными исходными данными.

Варианты задания.

Задание: В теплообменнике от температуры $t_{2н}$, °С до температуры $t_{2к}$, °С нагревается раствор. В качестве греющего агента используется горячая вода. Расход воды составляет G_1 , кг/с, а ее конечная температура равна $t_{1к}$, °С. Теплоемкость воды не зависит от температуры и равна C_1 , Дж/(кг·К). Поверхность нагрева теплообменника составляет F , м², а коэффициент теплопередачи равен K , Вт/(м²·К). Определить начальную температуру воды $t_{1н}$, °С, если известно, что теплоносители движутся относительно друг друга противотоком.

Таблица 1

Индивидуальные варианты задания для выполнения работы

№ вар.	Исходные данные для расчета									
	$t_{2н}$, °С	$t_{2к}$, °С	C_1 , Дж/(кг·К)	$t_{1к}$, °С	F , м ²	K , Вт/(м ² ·К)	H , °С	N	ε , °С	G_1 , кг/с
01.	20	70	4200	30	50	400	20	4	0.2	1.2
02.	10	75	4100	25	40	300	5	5	0.1	0.7
03.	15	63	4180	42	45	350	10	4	0.2	2.2
04.	18	56	4150	38	25	500	20	5	0.3	1.5
05.	16	81	4200	39	35	250	2	4	0.1	0.5
06.	23	72	4100	44	60	370	5	5	0.1	2.2
07.	13	74	4150	35	40	500	5	5	0.1	1.5
08.	17	67	4100	32	38	430	10	4	0.2	1.2
09.	19	68	4000	43	27	280	15	5	0.2	1.1
10.	21	64	4200	37	43	360	10	4	0.2	1.4

Задание: В теплообменнике, насыщенным водяным паром, температура которого равна $t_s, ^\circ\text{C}$, нагревается жидкость до температуры $t_k, ^\circ\text{C}$. Поверхность нагрева теплообменника составляет $F, \text{ м}^2$, а коэффициент теплопередачи равен $K, \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$. Определить начальную температуру жидкости $t_n, ^\circ\text{C}$, если известно, что жидкости передается $Q, \text{ Вт}$ теплоты.

Продолжение табл. 1.

№ вар.	Исходные данные для расчета							
	$Q \cdot 10^{-6},$ Вт	$F,$ м^2	$K,$ $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$	$t_s,$ $^\circ\text{C}$	$t_k,$ $^\circ\text{C}$	$H,$ $^\circ\text{C}$	N	$\varepsilon,$ $^\circ\text{C}$
11.	1.40	45	450	121	80	40	5	0.2
12.	0.95	60	250	112	77	25	10	0.1
13.	1.00	55	300	115	73	30	10	0.1
14.	1.10	50	350	127	93	20	4	0.2
15.	1.10	36	500	131	97	40	5	0.2
16.	0.65	27	400	105	82	25	5	0.3
17.	0.90	55	350	109	86	30	10	0.1
18.	1.20	35	600	118	79	20	5	0.2
19.	0.90	30	550	127	95	40	4	0.2
20.	1.60	55	350	136	87	25	10	0.3

Задание: В теплообменнике до температуры $t_k, ^\circ\text{C}$ нагревается $G, \text{ кг/с}$ жидкости. При этом ей передается $Q, \text{ Вт}$ теплоты. Определить начальную температуру жидкости $t_n, ^\circ\text{C}$, если известно, что удельная теплоемкость жидкости зависит от температуры и изменяется по закону: $C=A+B \cdot t+D \cdot \ln t^2$

Продолжение табл. 1.

№ вар.	Исходные данные для расчета								
	$Q \cdot 10^{-3},$ Вт	$G,$ кг/с	$t_k,$ $^\circ\text{C}$	A	B	D	$H,$ $^\circ\text{C}$	N	$\varepsilon,$ $^\circ\text{C}$
21.	665	2.0	90	2200	10	100	20	4	0.2
22.	750	2.5	80	2100	12	110	30	5	0.1
23.	470	1.5	85	2300	8	120	40	8	0.2
24.	670	1.8	88	2225	15	115	20	5	0.3
25.	680	2.2	86	2010	10	116	30	6	0.1
26.	520	1.7	82	2280	11	100	40	10	0.1
27.	780	2.3	90	2400	8	108	20	4	0.1
28.	860	2.8	78	2380	13	105	30	6	0.2
29.	950	2.6	83	2250	18	112	40	10	0.2
30.	920	2.7	92	2450	6	118	20	15	0.2

Задание: В теплообменнике до температуры $t_{2к}, ^\circ\text{C}$ нагревается раствор. В качестве греющего агента используется горячая вода. Расход воды составляет $G_1, \text{ кг/с}$, ее начальная температура равна $t_{1н}, ^\circ\text{C}$, а конечная - $t_{1к}, ^\circ\text{C}$. Теплоемкость воды не зависит от температуры и равна $C_1, \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$. Поверхность нагрева теплообменника составляет $F, \text{ м}^2$, а коэф-

коэффициент теплопередачи равен K , Вт/(м²·К). Определить начальную температуру раствора $t_{2н}$, °С, если известно, что теплоносители движутся относительно друг друга прямотоком.

Продолжение табл. 1.

№ вар.	Исходные данные для расчета									
	$t_{2к}$, °С	G_1 , кг/с	C_1 , Дж/(кг·К)	$t_{1н}$, °С	$t_{1к}$, °С	F , м ²	K , Вт/(м ² ·К)	H , °С	N	ε , °С
31.	66	6.9	4200	90	72	50	400	20	4	0.1
32.	59	4.5	3900	92	68	40	350	15	3	0.1
33.	63	6.6	3700	89	71	37	420	25	5	0.1
34.	69	2.7	4100	96	74	35	270	20	6	0.1
35.	51	8.7	4200	89	73	42	340	20	5	0.1
36.	64	6.4	3600	94	69	45	500	15	5	0.1
37.	48	6.2	3800	79	67	25	320	10	4	0.1
38.	68	7.9	4500	83	72	47	880	20	4	0.1
39.	69	8.5	3700	87	74	52	430	25	10	0.1
40.	73	6.0	4100	90	76	36	450	30	5	0.1

Задание: В теплообменнике, насыщенным водяным паром, температура которого равна t_s , °С нагревается жидкость. Начальная температура жидкости равна t_n , °С. Поверхность нагрева теплообменника составляет F , м², а коэффициент теплопередачи равен K , Вт/(м²·К). Определить, до какой температуры t_k , °С нагревается жидкость, если известно, что ей передается Q , Вт теплоты.

Продолжение табл. 1.

№ вар.	Исходные данные для расчета							
	$Q \cdot 10^{-6}$, Вт	F , м ²	K , Вт/(м ² ·К)	t_s , °С	t_n , °С	H , °С	N	ε , °С
41.	1.50	40	500	120	20	40	4	0.2
42.	0.85	50	300	110	30	25	5	0.3
43.	1.00	60	250	115	25	30	10	0.1
44.	1.10	45	400	125	42	20	5	0.2
45.	1.00	35	450	131	23	40	4	0.2
46.	0.45	42	200	105	18	25	5	0.3
47.	0.90	55	350	107	21	30	10	0.1
48.	1.20	37	600	118	34	20	5	0.2
49.	0.87	25	550	127	27	40	4	0.2
50.	1.60	53	400	135	25	25	5	0.3

Задание: В теплообменнике, насыщенным водяным паром, температура которого равна t_s , °С нагревается жидкость от температуры t_n , °С до температуры t_k , °С. Поверхность нагрева теплообменника составляет F , м².

Теплоемкость жидкости не зависит от температуры и равна C , Дж/(кг·К). Определить расход нагреваемой жидкости, если известно, что коэффициент теплопередачи теплообменника зависит от расхода жидкости и вычисляется по формуле: $K = A + B \cdot \ln G$.

Продолжение табл. 1.

№ вар	Исходные данные для расчета									
	t_s , °C	$t_{н\text{,}}$ °C	$t_{к\text{,}}$ °C	F , м ²	C Дж/(кг·К)	A	B	H , °C	N	ε кг/с
51.	120	23	87	40	3500	200	100	1.0	6	0.01
52.	115	18	79	32	4000	250	70	2.0	4	0.01
53.	125	28	93	28	3700	320	110	0.5	2	0.01
54.	130	31	97	30	4200	410	80	0.8	4	0.01
55.	127	24	86	23	4100	370	120	1.5	5	0.01
56.	119	21	77	16	3300	360	140	1.2	4	0.01
57.	114	16	91	51	4300	270	90	0.8	4	0.01
58.	117	18	85	34	3900	240	130	1.0	5	0.01
59.	123	22	94	46	3700	230	60	1.2	4	0.01
60.	126	15	92	38	3800	310	40	1.0	4	0.01

Задание: В теплообменнике от начальной температуры $t_{2н}$, °C нагревается раствор. В качестве греющего агента служит горячая вода. Расход воды составляет G_1 , кг/с, ее начальная температура равна $t_{1н}$, °C, а конечная - $t_{1к}$, °C. Теплоемкость воды не зависит от температуры и равна C_1 , Дж/(кг·К). Поверхность нагрева теплообменника составляет F , м², а коэффициент теплопередачи равен K , Вт/(м²·К). Определить конечную температуру раствора $t_{2к}$, °C, если известно, что теплоносители движутся относительно друг друга противотоком.

Продолжение табл. 1.

№ вар.	Исходные данные для расчета									
	$t_{2н}$, °C	G_1 , кг/с	C_1 , Дж/(кг·К)	$t_{1н}$, °C	$t_{1к}$, °C	F , м ²	K , Вт/(м ² ·К)	H , °C	N	ε , °C
61.	20	1.2	4200	85	30	50	400	30	5	0.2
62.	10	0.7	4100	87	25	40	420	15	3	0.2
63.	18	1.4	4000	90	40	45	400	35	5	0.1
64.	15	1.0	4150	86	35	48	450	35	7	0.1
65.	13	1.5	4220	89	28	43	480	25	4	0.1
66.	22	0.5	4200	85	32	40	350	20	4	0.1
67.	16	0.8	4180	83	30	55	450	16	4	0.2
68.	21	1.1	4220	86	40	50	380	30	5	0.1
69.	25	1.4	4020	89	45	42	420	11	3	0.1
70.	30	1.0	4100	90	38	52	460	14	4	0.2

Задание: В теплообменнике от температуры $t_H, ^\circ\text{C}$ нагревается $G, \text{кг/с}$ жидкости. При этом жидкости передается $Q, \text{Вт}$ теплоты. Определить конечную температуру жидкости $t_K, ^\circ\text{C}$, если известно, что удельная теплоемкость жидкости зависит от температуры и изменяется по закону:

$$C = A + B \cdot e^{D \cdot t}.$$

Продолжение табл. 1.

№ вар.	Исходные данные для расчета								
	$Q \cdot 10^{-3},$ Вт	$G,$ кг/с	$t_H,$ $^\circ\text{C}$	A	B	D	$H,$ $^\circ\text{C}$	N	$\varepsilon, ^\circ\text{C}$
71.	590	2.0	20	2000	300	0.010	20	4	0.1
72.	730	2.5	19	3000	400	0.010	30	5	0.2
73.	940	3.2	18	2500	350	0.015	40	8	0.1
74.	1200	4.1	16	2200	320	0.018	20	5	0.1
75.	1000	3.7	21	2700	370	0.012	30	6	0.2
76.	720	2.8	23	2400	340	0.014	40	10	0.1
77.	730	2.4	18	3100	410	0.010	20	4	0.1
78.	710	2.6	22	2900	390	0.011	30	6	0.2
79.	950	3.4	16	2300	320	0.018	40	10	0.1
80.	790	2.7	20	2100	310	0.019	20	5	0.1

Задание: В теплообменнике, насыщенным водяным паром нагревается жидкость от начальной температуры $t_H, ^\circ\text{C}$ до конечной температуры $t_K, ^\circ\text{C}$. Поверхность нагрева теплообменника составляет $F, \text{м}^2$. Коэффициент теплопередачи равен $K, \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K})$. Определить температуру греющего пара $t_S, ^\circ\text{C}$, если известно, что жидкости передается $Q, \text{Вт}$ теплоты.

Продолжение табл. 1.

№ вар.	Исходные данные для расчета							
	$Q \cdot 10^{-6},$ Вт	F, м ²	$K,$ Вт/(м ² ·K)	t _н , °C	t _к , °c	H, °C	N	ε, °C
81.	1.60	50	400	21	82	40	4	0.2
82.	0.85	60	250	32	74	25	5	0.3
83.	1.00	55	300	25	68	30	10	0.1
84.	1.10	45	400	42	87	40	4	0.2
85.	0.45	42	200	18	73	25	5	0.3
86.	0.90	55	350	22	83	30	10	0.1
87.	1.20	38	600	34	86	20	5	0.2
88.	0.87	25	550	27	89	40	4	0.2
89.	1.60	53	400	15	85	25	5	0.3
90.	1.00	35	450	23	91	30	10	0.1

Задание: В теплообменнике от температуры $t_{2н}$, °С до температуры $t_{2к}$, °С нагревается раствор. В качестве греющего агента служит горячая вода. Расход воды составляет G_1 , кг/с, а ее начальная температура равна $t_{1н}$, °С. Теплоемкость воды не зависит от температуры и равна C_1 , Дж/(кг·К). Поверхность нагрева теплообменника F , м², а коэффициент теплопередачи равен K , Вт/(м²·К). Определить конечную температуру воды $t_{1к}$, °С, если известно, что теплоносители движутся относительно друг друга прямотоком.

Окончание табл. 1.

№ вар.	Исходные данные для расчета									
	$t_{2н}$, °С	$t_{2к}$, °С	G_1 , кг/с	C_1 , Дж/(кг·К)	$t_{1н}$, °С	F , м ²	K , Вт/(м ² ·К)	H , °С	N	ϵ , °С
91.	20	60	7.3	4200	90	50	400	6	4	0.1
92.	18	57	5.7	3900	92	40	350	10	5	0.1
93.	15	63	6.3	3700	89	37	420	5	3	0.1
94.	13	66	2.3	4100	96	35	270	3	2	0.1
95.	16	48	7.6	4200	89	42	340	12	4	0.1
96.	12	64	7.5	3600	94	46	500	4	5	0.1
97.	17	46	9.4	3800	79	25	320	15	3	0.1
98.	21	69	9.2	4500	83	47	390	7	4	0.1
99.	23	68	6.4	3700	87	52	430	1	3	0.1
100	22	63	9.7	4100	83	45	450	3	4	0.1

4 Пример выполнения задания

4.1 Задание

Жидкость, расход которой равен G , кг/с, с температурой t_1 , °С поступает в теплообменник, где нагревается насыщенным водяным паром. Температура водяного пара равна t_s , °С. Поверхность нагрева теплообменника составляет F , м², а коэффициент теплопередачи K , Вт/(м²·К). Удельная теплоемкость жидкости зависит от температуры и изменяется по закону: $C = A + B \cdot t$, где A , B - известные коэффициенты. Определить до какой температуры t_2 , °С нагревается жидкость в теплообменнике.

Известно: расход жидкости G , кг/с;

начальная температура жидкости t_1 , °С;

поверхность нагрева теплообменника F , м²;

коэффициент теплопередачи K , Вт/(м²·К);

зависимость удельной теплоемкости жидкости от

температуры: $C = A + B \cdot t$, Дж/(кг·К);

коэффициенты A , B ;

температура греющего пара t_s , °С;

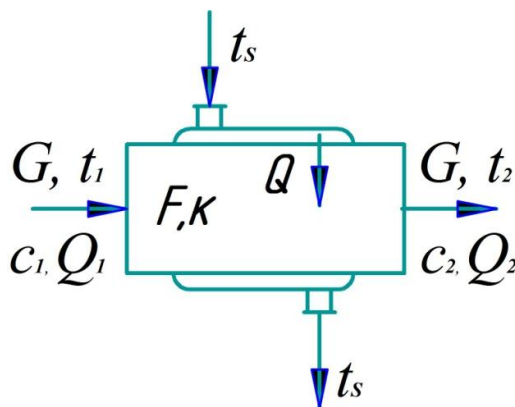


Рис.5. Расчетная схема теплообменника

4.2 Математическое описание

Уравнение теплового баланса теплообменника:

$$Q_1 + Q = Q_2 \quad (4.1)$$

Теплота потока жидкости на входе в теплообменник:

$$Q_1 = G \cdot c_1 \cdot t_1 \quad (4.2)$$

Удельная теплоемкость жидкости на входе в теплообменник:

$$c_1 = A + B \cdot t_1 \quad (4.3)$$

Теплота потока жидкости на выходе из теплообменника:

$$Q_2 = G \cdot c_2 \cdot t_2 \quad (4.4)$$

Удельная теплоемкость жидкости на выходе из теплообменника:

$$c_2 = A + B \cdot t_2 \quad (4.5)$$

Количество переданной теплоты от греющего пара к нагреваемой жидкости, определяемое из основного уравнения теплопередачи:

$$Q = K \cdot F \cdot \Delta t_{cp} \quad (4.6)$$

Средняя движущая сила теплообмена:

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t_{\delta} - \Delta t_{\mu}}{\ln \frac{\Delta t_{\delta}}{\Delta t_{\mu}}}, \quad (4.7)$$

где

$$\Delta t_{\delta} = t_s - t_1 ; \quad \Delta t_{\mu} = t_s - t_2 \quad (4.8)$$

Система уравнений (4.1) - (4.8) является математическим описанием процесса нагревания жидкости насыщенным водяным паром.

Подставляя выражение (4.7) в уравнение (4.6), выражение (4.5) - в уравнение (4.4), а выражение (4.3) - в уравнение (4.2), получаем соотношения для Q , Q_1 и Q_2 .

Подставляя эти соотношения в уравнение (4.1), получим:

$$y = f(t_2) = G(A + B \cdot t_1)t_1 + K \cdot F \cdot \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{t_s - t_1}{t_s - t_2}} - G(A + B \cdot t_2)t_2 = 0 \quad (4.9)$$

В уравнении (4.9) все величины известны, кроме переменной t_2 . Для нахождения значения этой переменной применим пошаговый метод решения нелинейных уравнений с одной неизвестной.

4.3 Алгоритм решения

1. Ввод исходных данных $t_s, t_1, G, K, F, A, B, H, N, \varepsilon$.
2. Задаемся начальным значением t_2 , заведомо меньшим, чем значение корня уравнения (4.9).
Удобно было бы взять в качестве начального значения $t_2 = t_1$, но тогда $\ln \frac{t_s - t_1}{t_s - t_2} = 0$ и при вычислении $f(t_2)$ будет деление на 0, что недопустимо. Поэтому принимаем $t_2 = t_1 + 0,1$.
3. Вычисление значения $y = f(t_2)$ по уравнению (4.9).
4. Запоминание значения $f(t_2)$: $y_0 = y$.
5. Увеличение значения переменной t_2 на величину шага H : $t_2 = t_2 + H$.
6. Проверка условия: $t_2 \geq t_s$, так как при $t_2 \geq t_s$, $\ln \frac{t_s - t_1}{t_s - t_2}$ не существует.

Если условие выполняется, идти в п.10.

7. Вычисление значения $y = f(t_2)$.
8. Проверка условия смены знака функции $y = f(t_2)$: $y \cdot y_0 > 0$.
9. Если условие соблюдается, т.е. если y и y_0 имеют одинаковые знаки, идти в п.5.
10. Сравнение величины шага поиска с заданной точностью поиска $H < \varepsilon$. Если условие выполняется, идти в п. 13.
11. Возврат к предыдущему значению t_2 : $t_2 = t_1 + 0,1$.
12. Дробление шага поиска H : $H = H / N$.
13. Идти в п.5.
14. Вывод значения t_2 на печать.

4.4. Формирование таблицы соответствия

Таблица 2

Таблица идентификаторов

Переменные математического описания	y	y_0	t_s	t_1	t_2	K	F	H	N	ε	A	B	Q_1	Q_2	Q
Машинные идентификаторы	Y	y0	T	T1	T2	K	F	H	N	E	A	B	Q1	Q2	Q

4.5 Программа на алгоритмическом языке БЕЙСИК

```
10 REM МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА
20 PRINT "T=";: INPUT T
30 PRINT "T1=";: INPUT T1
40 PRINT "G,K,F,A,B";: INPUT G,K,F,A,B
50 PRINT "H,N,E";: INPUT H,N,E
60 T2=T1+0.1
70 Q1=G*(A+B*T1)*T1
80 GOSUB 500
90 Y0=Y
100 T2=T2+H
110 IF T2>T GOTO 150
120 GOSUB 500
130 IF Y*Y0>0 GOTO 100
140 IF H<E GOTO 540
150 T2=T2-H
160 H=H/N
170 GOTO 100
500 Q=K*F*(T2-T1)/LOG((T-T1)/(T-T2))
510 Q2=G*(A+B*T2)*T2
520 Y=Q1+Q-Q2
530 RETURN
540 PRINT "T2=";T2;"Q=";Q
550 END
```

4.6 Расчет по программе

Дано:

$T=120^{\circ}\text{C}$; $T_1=20^{\circ}\text{C}$; $G=2\text{ кг/с}$; $K=200\text{ Вт/(м}^2\cdot\text{K)}$; $F=50\text{ м}^2$;
 $A=3000$; $B=10$; $H=40^{\circ}\text{C}$; $N=4$; $E=0,2^{\circ}\text{C}$.

Вычислить значение $t_2, ^{\circ}\text{C}$

1) $Q_1=G(A+B\cdot T_1)T_1=128000$

$T_2=T_1+0.1=20.1$

$Q_2=G(A+B\cdot T_2)T_2=128680.1$

$Q=K\cdot F\cdot (T_2-T_1)/\ln((T-T_1)/(T-T_2))=999500.92$

$Y=Q_1+Q-Q_2=998820.72$

$Y_0=Y=998820.72$

2) $T_2=T_2+H=60.1$

$T_2<T$, т.к. $60.1<120$

$Q_2=G(A+B\cdot T_2)T_2=432840.2$

$Q=K\cdot F\cdot (T_2-T_1)/\ln((T-T_1)/(T-T_2))=782448.67$

$Y=Q_1+Q-Q_2=477608.47$

$Y_0\cdot Y>0$, т.к. $998820.72\cdot 477608.47>0$

3) $T_2=T_2+H=100.1$

$T_2<T$, т.к. $100.1<120$

$Q_2=G(A+B\cdot T_2)T_2=801000.2$

$Q=K\cdot F\cdot (T_2-T_1)/\ln((T-T_1)/(T-T_2))=496144.05$

$Y=Q_1+Q-Q_2=-176856.15$

$Y_0\cdot Y<0$, т.к. $998820.72\cdot (-176856.15)<0$

$H>\varepsilon$, т.к. $40>0.2$

$T_2=T_2-H=60.1$

$H=H/N=10$

4) $T_2=T_2+H=70.1$

$Q_2=G(A+B\cdot T_2)T_2=518880.2$

$Q=K\cdot F\cdot (T_2-T_1)/\ln((T-T_1)/(T-T_2))=720708.6$

$Y=Q_1+Q-Q_2=329828.4$

$Y_0\cdot Y>0$, т.к. $998820.72\cdot 329828.4>0$

5) $T_2=T_2+H=80.1$

$Q_2=G(A+B\cdot T_2)T_2=608920.2$

$Q=K\cdot F\cdot (T_2-T_1)/\ln((T-T_1)/(T-T_2))=654118.43$

$Y=Q_1+Q-Q_2=173198.23$

$Y_0\cdot Y>0$, т.к. $998820.72\cdot 173198.23>0$

6) $T_2=T_2+H=90.1$

$Q_2=G(A+B\cdot T_2)T_2=702960.2$

$Q=K\cdot F\cdot (T_2-T_1)/\ln((T-T_1)/(T-T_2))=580628.84$

$Y=Q_1+Q-Q_2=5668.642$

$Y_0\cdot Y>0$, т.к. $998820.72\cdot 5668.642>0$

7) $T_2=T_2+H=100.1$

$Q_2=G(A+B\cdot T_2)T_2=801000.2$

$Q=K\cdot F\cdot (T_2-T_1)/\ln((T-T_1)/(T-T_2))=496144.05$

$Y=Q_1+Q-Q_2=-176856.15$
 $Y_0 \cdot Y < 0, \text{ т.к. } 998820.72 \cdot (-176856.15) < 0$
 $H > E, \text{ т.к. } 10 > 0.2$
 $T_2 = T_2 - H = 90.1$
 $H = H/N = 2.5$
 8) $T_2 = T_2 + H = 92.6$
 $Q_2 = G(A+B \cdot T_2)T_2 = 727095.2$
 $Q = K \cdot F \cdot (T_2 - T_1) / \ln((T - T_1)/(T - T_2)) = 560779.2$
 $Y = Q_1 + Q - Q_2 = -38315.991$
 $Y_0 \cdot Y < 0, \text{ т.к. } 998820.72 \cdot (-38315.991) < 0$
 $H > E, \text{ т.к. } 2.5 > 0.2$
 $T_2 = T_2 - H = 90.1$
 $H = H/N = 0.625$
 9) $T_2 = T_2 + H = 90.725$
 $Q_2 = G(A+B \cdot T_2)T_2 = 708970.51$
 $Q = K \cdot F \cdot (T_2 - T_1) / \ln((T - T_1)/(T - T_2)) = 575731.93$
 $Y = Q_1 + Q - Q_2 = -5238.58$
 $Y_0 \cdot Y < 0, \text{ т.к. } 998820.72 \cdot (-5238.58) < 0$
 $H > E, \text{ т.к. } 0.625 > 0.2$
 $T_2 = T_2 - H = 90.1$
 $H = H/N = 0.15625$
 10) $T_2 = T_2 + H = 90.25625$
 $Q_2 = G(A+B \cdot T_2)T_2 = 704461.31$
 $Q = K \cdot F \cdot (T_2 - T_1) / \ln((T - T_1)/(T - T_2)) = 579408.54$
 $Y = Q_1 + Q - Q_2 = 2947.232$
 $Y_0 \cdot Y > 0, \text{ т.к. } 998820.72 \cdot 2947.232 > 0$
 11) $T_2 = T_2 + H = 90.4125$
 $Q_2 = G(A+B \cdot T_2)T_2 = 705963.4$
 $Q = K \cdot F \cdot (T_2 - T_1) / \ln((T - T_1)/(T - T_2)) = 578185.63$
 $Y = Q_1 + Q - Q_2 = 222.939$
 $Y_0 \cdot Y > 0, \text{ т.к. } 998820.72 \cdot 222.939 > 0$
 12) $T_2 = T_2 + H = 90.56875$
 $Q_2 = G(A+B \cdot T_2)T_2 = 707466.47$
 $Q = K \cdot F \cdot (T_2 - T_1) / \ln((T - T_1)/(T - T_2)) = 576960.1$
 $Y = Q_1 + Q - Q_2 = -2506.353$
 $Y_0 \cdot Y < 0, \text{ т.к. } 998820.72 \cdot (-2506.353) < 0$
 $H < E, \text{ т.к. } 0.15625 < 0.2$

ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТОВ:

$T_2 = 90.56875 \approx 90,6 \text{ } ^\circ\text{C}.$

5. Контрольные вопросы

1. Какие уравнения не могут быть приведены к явному виду?
2. Какие численные методы применяются для приближенного решения алгебраических уравнений с одним неизвестным?
3. На какие этапы разбивается задача отыскания корней уравнений?
4. Должна ли функция менять свой знак на выбранном интервале значений аргумента при использовании метода дихотомии?
5. Какие условия окончания расчета могут использоваться?
6. От чего зависит успех применения метода простых итераций?
7. Каковы особенности метода касательных, его достоинства и недостатки?
8. Модификацией какого метода является метод секущих?
9. Сколько начальных приближений неизвестной необходимо задавать при использовании метода Ньютона и метода секущих?
10. Какие методы называют одно- и двухшаговыми?
11. Изобразите графическую интерпретацию метода простой итерации.
12. Изобразите графическую интерпретацию метода дихотомии
13. Изобразите графическую интерпретацию метода касательных (Ньютона).
14. Изобразите графическую интерпретацию метода секущих.
15. Запишите итерационные формулы методов дихотомии, простых итераций, касательных и секущих.

Список рекомендуемой литературы для самостоятельного изучения

1. Павлов, К.Ф. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии: учеб. пособие для студ. хим.-технолог. спец. вузов / К.Ф. Павлов, П.Г. Романков, А.А. Носков; под. ред. П.Г. Романкова. - 10-е изд., перераб. и доп. - М.: Альянс, 2013. - 576 с.
2. Касаткин, А. Г. Основные процессы и аппараты химической технологии: учеб. для вузов / А. Г. Касаткин. – изд. 14-е, стер. – М.: Альянс, 2008. – 750 с.
3. Высоцкий, Л. И. Математическое и физическое моделирование потенциальных течений жидкости [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. И. Высоцкий, Г. Р. Коперник, И. С. Высоцкий. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург: Лань, 2014. - 64 с. - ISBN 978-5-8114-1554-0. - (ЭБС "Лань"). – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=44756
4. Математическое моделирование и оптимизация химико-технологических процессов.: Практическое руководство. В.А. Холоднов и др.– СПб.: АНО НПО «Профессионал», 2003. – 480 с.
5. Пирумов, У.Г. Численные методы: Учебное пособие для студ. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Дрофа, 2003. – 224 с.
6. Батунер, Л.М. Математические методы в химической технике/ Л.М. Батунер, М.Е. Позин. – Л.: Химия, 1971. – 824 с.
7. Самарский, А.А. Численные методы/ А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

Составители:

Анжелика Анатольевна **Шагарова**

Пётр Сергеевич **Васильев**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Темплан 2018 г. (учебно-методическая литература). Поз. № ____.

Подписано в печать _____.2018 г. Формат 60×84 1/16. Бумага газетная.

Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0.

Тираж 10 экз. Заказ _____.

Волгоградский государственный технический университет.

400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28 корп.1.

Отпечатано в типографии ИУНЛ ВолгГТУ

400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 7.