Оглавление

ГЛАВА I

Ряды

§1. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда

1.1. Общие понятия

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – произвольные числа. Числовым рядом называется выражение

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, а выражение a_n как функция числа n – общим членом ряда. Если вместо n в формулу общего члена ряда подставлять значения $1, 2, 3, \ldots$, то можно найти сколько угодно членов ряда.

Пример 1. Написать четыре первых члена ряда по данному общему члену $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение: Полагая в формуле общего члена последовательно значения $1, 2, 3, 4$, получим:

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}, \quad a_4 = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}.$$

Пример 2. Написать формулу общего члена для каждого ряда:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \ldots$

3) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} \ldots$

Решение: 1) Знаменатели членов данного ряда – натуральный ряд чисел. Следовательно, общий член $a_n = \frac{1}{n}$.

2) Знаменатели членов данного ряда могут быть получены из формулы 2^{n-1}, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно, общий член $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

3) Числители членов данного ряда – чётные числа вида $2n$, а знаменатели – числа, которые могут быть получены по формуле $3n+2$. Следовательно, общий член $a_n = \frac{2n}{3n+2}$.

Сумма n первых членов ряда (1) называется n-й частичной суммой ряда и обозначается через S_n, то есть

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Частичная сумма S_n является функцией натурального числа n. Исходя из определения частичной суммы, имеем

$$\begin{array}{lcl} S_1 & = & a_1, \\ S_2 & = & a_1 + a_2, \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3, \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \end{array}$$

Если бесконечная последовательность частичных сумм ряда (1)

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$$

имеет конечный предел, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то говорят, что этот ряд сходится. В этом случае число S называется суммой сходящегося ряда (1). Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (1) называется расходящимся. В этом случае не имеет смысла говорить о его сумме.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}. \tag{2}$$

Решение: Ряд (2) есть геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен q. Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле (при $q \neq 1$)

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если знаменатель прогрессии q по абсолютной величине меньше единицы, то есть $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right] = \frac{1}{1-q}.$$

Следовательно, при $|q| < 1$ ряд (2) сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

При $q = 1$, $S_n = 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; при $q = -1$ последовательность частичных сумм имеет вид $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ и не стремится ни к какому пределу. Таким образом, при $q = 1$ и при $q = -1$ ряд (2) расходится.

Если знаменатель геометрической прогрессии $q > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Ряд (2) в этом случае расходится. Если $q < -1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ не существует, поэтому не существует и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и, значит, ряд (2) расходится.

Итак, при $|q| < 1$ ряд (2) сходится, при $|q| \geqslant 1$ – расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

Решение: Поскольку для этого ряда $S_{2m-1} = 1$, $S_{2m} = 0$ при любом натуральном m, то последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела при $n \to \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ расходится. Заметим, что этот ряд является рядом из примера 3 при $q = -1$.

Ряд

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots \tag{3}$$

называется n-м остатком ряда (1) или остатком после n-го члена.

Ряд (1) сходится или расходится вместе со своим остатком (3), поэтому часто при исследовании вопроса о сходимости ряда вместо него рассматривают n-й остаток.

Заметим, что если ряд (1) сходится и его сумма равна S, то $R_n = S - S_n$, так как $S = S_n + R_n$ для любого натурального n.

Пример 5. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+3}}.$$

Решение: Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}.$$

Этот ряд рассмотрен в примере 3 при $q = \frac{1}{5}$, его сумма равна $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+3}}$ можно записать в виде $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$, то он является остатком после четвёртого члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$ и равен

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n+3}}=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}-\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}\right)=\frac{5}{4}-\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^4}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{500}.$$

В приведённых примерах последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда вычислялась достаточно просто, так что существование и величина предела S_n устанавливались непосредственно. Таким образом, в силу определения одновременно доказывалась и сходимость ряда и вычислялась сумма рассматриваемого ряда. Чаще, однако, непросредственный анализ последовательности $\{S_n\}$ очень сложен, поэтому основной задачей в теории числовых рядов является установление сходимости или расходимости данного ряда без вычисления его суммы.

1.2. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{4}$$

Пример 6. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots$$

Решение: Общий член $a_n=\frac{n}{n+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, то необходимое условие (4) сходимости ряда не выполняется. Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 7. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{5}$$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Значит необходимое условие сходимости ряда выполнено.

Замечание. Из выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд, рассмотренный в примере 7, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется гармоническим. Этот ряд расходится, хотя для него выполняется необходимое условие сходимости.

Задачи для самостоятельного решения

Написать формулу общего члена ряда:

1) $1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \ldots$

2) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots$

3) $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{7} + \dfrac{16}{9} + \ldots$

4) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{7} + \dfrac{8}{9} + \dfrac{10}{11} + \ldots$

Написать четыре первых члена ряда по известному общему члену:

5) $a_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}$.

6) $a_n = \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

7) $a_n = \dfrac{\left(2+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

8) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2n^2}$.

9) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$.

Доказать непосредственно сходимость ряда и найти его сумму:

10) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots$

11) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots$

12) $1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots$

13) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

14) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \ldots$

15) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$

16) $\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7^2}+\dfrac{3}{7^3}+\dfrac{4}{7^4}+\ldots$

17) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{9^2}+\dfrac{3}{9^3}+\dfrac{4}{9^4}+\ldots$

18) $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots,\ |a|<1.$

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right).$

Установить расходимость ряда, используя необходимый признак сходимости:

20) $1-1-1+1+1+1-1-1-1-1+\ldots$

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{n+1}.$

22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\dfrac{1}{n^2+n+1}.$

23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}.$

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}.$

25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$

26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{0,3}}.$

27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}.$

28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3n+2}.$

§2. Достаточные признаки сходимости положительных рядов

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется положительным, если $a_n\geqslant 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется строго положительным, если $a_n>0$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

2.1. Первый признак сравнения

Пусть даны два ряда

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

и

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

Если ряды (1) и (2) положительны и при всех натуральных n выполнено неравенство $a_n \leqslant b_n$, то

1) Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);
2) Если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Замечание. Признак сравнения остаётся верным для любых рядов (1) и (2), если для некоторого числа n_0 при всех натуральных $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^{n-1}} + \ldots$$

Решение: Сравним данный ряд с геометрической прогрессией

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Ряд (3) сходится, так как знаменатель прогрессии $q = \frac{1}{2}$ (см. пример 3 §1). Члены исходного ряда не превосходят соответствующих членов геометрической прогрессии (3), так как $\frac{1}{n^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ при $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Решение: Общий член данного ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ больше общего члена гармонического ряда $b_n = \frac{1}{n}$, который, как известно, расходится. Следовательно, данный ряд также расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 5^n} + \ldots$$

Решение: Сравним данный ряд с бесконечной геометрической прогрессией

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$$

Так как эта прогрессия сходится, а $\frac{1}{n\cdot 5^n}<\frac{1}{5^n}$, то по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

2.2. Второй признак сравнения

Если ряды (1) и (2) являются строго положительными и для членов рядов выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0,$$

где k – конечное (отличное от нуля) число, то ряды (1) и (2) либо оба сходятся, либо оба расходятся, то есть эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\ldots+\sin\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение: Общий член данного ряда $a_n=\sin\frac{1}{n}$. Общий член расходящегося гармонического ряда $b_n=\frac{1}{n}$. Применяем второй признак сравнения. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0\quad\text{(первый замечательный предел)},$$

то исследуемый ряд расходится.

Пример 5. Известно, что числовой ряд, общий член которого $a_n=\frac{1}{n^2}$, сходится. Доказать сходимость ряда с общим членом $b_n=\frac{1}{n(2n+1)}$.

Решение: Применяем второй признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(2n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n^2}=2\neq 0.$$

Следовательно, ряд с общим членом $b_n=\frac{1}{n(2n+1)}$ сходится.

Пример 6. Доказать сходимость ряда с общим членом $a_n=\ln(1+\frac{1}{n^2})$, зная, что ряд с общим членом $b_n=\frac{1}{n^2}$ сходится.

Решение: Применяем второй признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]=\ln e=1\neq 0$$

(второй замечательный предел). Следовательно, исследуемый ряд также сходится.

2.3. Признак сходимости Даламбера

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,\quad a_n>0, \tag{4}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

то

1) при $q<1$ ряд (4) сходится,
2) при $q>1$ или $q=+\infty$ ряд (4) расходится,
3) при $q=1$ о сходимости или расходимости ряда (4) ничего сказать нельзя и в этом случае надо применить другой признак сходимости.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Решение:

$$a_n=\frac{1}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Применим признак Даламбера.

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Так как $q=0<1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(n+1)}.$$

Решение: Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{5^n}{n(n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)(n+2)},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}n(n+1)}{(n+1)(n+2)5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+2} = 5.$$

Так как $q = 5 > 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots$$

Решение: Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n!(n+1)n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Так как $q = e > 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд расходится.

2.4. Признак сходимости Коши

Если для ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_n \geqslant 0, \tag{5}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то

1) при $q < 1$ ряд (5) сходится,
2) при $q > 1$ или $q = +\infty$ ряд (5) расходится,
3) при $q = 1$ о сходимости или расходимости ряда (5) ничего сказать нельзя и в этом случае надо применить другой признак сходимости.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Решение: Применим признак Коши.

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^n},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Так как $q = 0 < 1$, то по признаку Коши исследуемый ряд сходится.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n.$$

Решение: Применим признак Коши.

$$a_n = \left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n,$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n-5} = 3.$$

Так как $q = 3 > 1$, то по признаку Коши исследуемый ряд расходится.

2.5. Интегральный признак Коши–Маклорена

Если функция $f(x)$ на промежутке $[1; +\infty)$ является непрерывной, положительной и невозрастающей, то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{где } a_n = f(n),$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Замечание. В этом интеграле в качестве нижнего предела можно брать любое число, большее или равное 1.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{1+n^2} + \ldots$$

Решение: Применим интегральный признак сходимости Коши–Маклорена. Чтобы составить функцию $f(x)$, достаточно в формуле общего члена ряда заменить n на x. Таким образом, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Так как функция $f(x)$

на промежутке $[1;+\infty)$ является непрерывной, положительной и убывающей, то можем воспользоваться интегральным признаком Коши–Маклорена. Рассмотрим соответствующий несобственный интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то по признаку Коши–Маклорена сходится и исследуемый ряд.

Пример 13. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

Решение: Применим интегральный признак сходимости Коши–Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \frac{1}{x(x+3)}$. Далее,

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+3)} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x(x+3)} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3} \int\limits_{1}^{b} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} [\ln x - \ln(x+3)]_1^b = \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} \left[\ln \frac{x}{x+3}\right]_1^b =$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} \left[\ln \frac{b}{b+3} - \ln \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{3} \ln 4 = \ln \sqrt[3]{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то по признаку Коши–Маклорена сходится и исследуемый ряд.

Пример 14. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Решение: Применим интегральный признак сходимости Коши–Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} [\ln \ln x]_2^b = \lim_{b\to+\infty} [\ln \ln b - \ln \ln 2] = +\infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то по признаку Коши–Маклорена ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

Пример 15. Исследовать сходимость ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

где p – любое действительное число.

Решение: Общий член ряда $a_n = \frac{1}{n^p}$. Если $p \leqslant 0$, то общий член ряда a_n не будет стремиться к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости ряда, ряд в этом случае будет расходиться. Для $p > 0$ применим признак Коши–Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Рассмотрим отдельно три случая.

1) Пусть $p = 1$. Тогда общий член ряда $a_n = \frac{1}{n}$, этот ряд называется гармоническим. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Следовательно, по интегральному признаку Коши–Маклорена гармонический ряд расходится.

2) Пусть $p > 1$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, по интегральному признаку Коши–Маклорена ряд Дирихле при $p > 1$ сходится.

3) Если $p < 1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = +\infty$ и несобственный интеграл расходится.

Таким образом, ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Замечание. Следующие ряды часто используют для сравнения с другими рядами при исследовании вопроса о сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \quad \begin{cases} q < 1 & \text{сходится } (q > 0), \\ q \geqslant 1 & \text{расходится} \end{cases} \qquad \text{(см. пример 3 §1)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} p \leqslant 1 & \text{расходится}, \\ p > 1 & \text{сходится} \end{cases} \qquad \text{(см. пример 15)}.$$

Пример 16. Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}.$$

Решение: Последовательность e^n при $n \to \infty$ растёт быстрее, чем любая степень n, поэтому для любого $s > 0$ существует такое число $N_0(s)$ (зависящее от s), что для любого $n > N_0(s)$ выполнено неравенство $e^n > n^s$. Отсюда, для членов ряда выполняется соотношение $\frac{n^2}{e^n} < \frac{n^2}{n^s} = \frac{1}{n^{s-2}}$ при любом $n > N_0(s)$. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-2}}$ сходился, необходимо выполнение условия $s - 2 > 1$, то есть $s > 3$. Положим $s = 5$ и получим неравенство $\frac{n^2}{e^n} < \frac{1}{n^3}$. Тогда, в силу первого признака сравнения, получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ сходится, поскольку сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Пример 17. Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}.$$

Решение: Логарифмическая функция $\ln x$ при $x \to +\infty$ растёт медленнее, чем любая степенная функция x^s $(s > 0)$. Таким образом, для любого $s > 0$ существует такое $N_0(s)$, что $\ln n < n^s$ при $n > N_0(s)$. Отсюда получаем неравенство $\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^s}{n^{3/2}}$. Положим $s = \frac{1}{3}$, тогда $\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{1}{n^{7/6}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ сходится, поэтому, в силу первого признака сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ряд:

29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+2)2^n}$.

30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$.

31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}}$.

32) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+2}{3n^4+n^3+2n+1}$.

33) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+3^n}$.

34) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+2n)^3}$.

35) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^{n^2}}$.

36) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

37) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

38) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^4+3n^3}{n^4+1}$.

39) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

40) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

41) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin \dfrac{1}{n^3}$.

42) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right) \ln \dfrac{3n+1}{3n-1}$.

Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

43) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$.

44) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$.

45) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{7^n}$.

46) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{3^n}$.

47) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

48) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$.

49) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n-4)(4n-1)}$.

50) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

51) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$.

Используя признак Коши, исследовать на сходимость ряд:

52) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^n$.

53) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5-(-1)^n)^n}{n \cdot 4^n}$.

54) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln\dfrac{2n+1}{n+5}\right)^n$.

55) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$.

56) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\dfrac{3}{n}\right)^{n^3}$.

Используя интегральный признак, исследовать на сходимость ряд:

57) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

58) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$.

59) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

60) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)2n}$.

61) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

Применяя различные признаки сходимости, исследовать сходимость знакоположительных рядов:

62) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \sin\dfrac{1}{n^2}$.

63) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}$.

64) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n-\sin n}$.

65) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

66) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^3+5}$.

67) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^5}$.

68) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{(n+1)^2}$.

69) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^5+1}{n^5}$.

70) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{10^n - n}$.

71) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3^{1/n} - 1\right) \sin \dfrac{\pi}{n}$.

72) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$.

73) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{n!}$.

74) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{2n+5}$.

75) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[7]{n} \left(\ln \cos \dfrac{1}{n}\right)^2$.

76) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arcsin \frac{1}{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

77) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{10} e^{-\sqrt{n}}$.

78) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt[3]{n}}$.

79) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{e^n}$.

80) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n!}$.

81) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

82) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 2 + a^{-\frac{1}{n}}\right), \ a > 0, \ a \neq 1$.

83) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\alpha} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n}$.

84) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{1}{n}}{5^n}$.

85) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+5}{3n-1}\right)^n$.

86) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \arccos \dfrac{1}{n}$.

87) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^n$.

88) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right)^{\frac{1}{n}}$.

89) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$.

90) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n}}$.

91) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+3}\right)$.

92) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$.

93) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$.

94) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

95) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$.

96) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

97) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^{1/n^3}-1\right)$.

98) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$.

99) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$.

100) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$.

101) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$.

102) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

103) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}-1}$.

104) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{7}{n}\right)^{n}$.

105) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{1}{n^\alpha}-\ln\sin\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

106) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n$.

107) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^{\alpha} n}$.

108) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$.

109) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 n}, \ \alpha\neq 0$.

110) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n\left(3^{1/n}-1\right)\right]$.

111) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{\ln\cos\frac{1}{n}}{\ln\cos\frac{3}{n}}\right)^n$.

112) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln^2\ln n}$.

113) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^3}{[(2n+1)!]^{3/2}}$.

§3. Знакопеременные ряды

3.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Если среди членов данного ряда имеются как положительные, так и отрицательные (причём и тех и других бесконечное число), то такой ряд называется знакопеременным. Знакопеременный ряд называется знакочередующимся, если любые два рядом стоящие члена имеют противоположные знаки. Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots$$

или так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^{n}a_n + \ldots,$$

где все числа a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ положительны.

Для знакочередующихся рядов справедлив следующий признак сходимости Лейбница.

Знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots, \quad a_n \geqslant 0$$

сходится, если

1) $a_n \geqslant a_{n+1}$ для всех n,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пример 1. Доказать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Этот ряд называется рядом Лейбница.

Решение: Данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают, так как

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Следовательно, по признаку Лейбница этот ряд сходится.

Замечание. Для сходимости знакочередующегося ряда недостаточно, чтобы его общий член стремился к нулю. В признаке Лейбница существенно, чтобы абсолютная величина общего члена ряда стремилась к нулю монотонно.

Пример 2. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$$

Решение: Ряд знакочередующийся, общий член данного ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, но члены ряда убывают немонотонно (нарушено одно из условий признака Лейбница).

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} > \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{3}-1} \quad \text{и так далее.}$$

Монотонность нарушается при переходе от члена $-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ к члену $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$.

Исследуем сходимость этого ряда, пользуясь основным определением. Составим частичную сумму из $2n$ его членов.

$$S_{2n} = \sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1}\right) = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k-1} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty,$$

так как гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty$, то по определению данный ряд расходится.

Замечание. Если знакочередующийся ряд сходится, то необязательно выполняется признак Лейбница. Знакочередующийся ряд может оказаться сходящимся, когда абсолютная величина его общего члена стремится к нулю немонотонно.

Пример 3. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} - \ldots + \frac{1}{(2n-1)^4} - \frac{1}{(2n)^3} + \ldots$$

Решение: Общий член данного ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, хотя и немонотонно:

$$1 > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^4}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{3^4} < \frac{1}{4^3} \quad \text{и так далее.}$$

Однако этот ряд сходится (и притом абсолютно, см. пункт 3.2), так как сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} + \ldots,$$

каждый член которого не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (см. пример 15 §2).

3.2. Абсолютная и условная сходимость рядов

Пусть дан ряд с членами произвольного знака

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

Составим новый ряд из абсолютных величин членов ряда (1)

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{2}$$

Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть сходится ряд (2).

Ряд (1) называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд (2), расходится.

Замечание. Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1).

Пример 4. Доказать, что ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

сходится условно.

Решение: Если составить ряд из абсолютных величин членов данного ряда, то получим гармонический ряд, который расходится. Исходный ряд сходится по признаку Лейбница (см. пример 1). Следовательно, данный ряд сходится условно.

Пример 5. Доказать, что ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\dots$$

сходится абсолютно.

Решение: Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница. Если составить ряд из абсолютных величин его членов, то получим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, которая сходится. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Замечание. Пусть ряд (1) с членами произвольного знака сходится абсолютно. Если в этом ряду выбрать только положительные или только отрицательные члены, то полученные ряды будут оба сходящимися. Если же ряд (1) сходится условно, то ряды, составленные только из положительных или только из отрицательных его членов, будут расходящимися рядами.

Пример 6. Доказать, что ряд

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{27}+\frac{1}{8}-\dots$$

сходится абсолютно.

Решение: Положительные члены данного ряда образуют сходящуюся геометрическую прогрессию

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots,$$

сумма которой равна 2. Аналогично, отрицательные члены данного ряда образуют прогрессию

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}-\dots,$$

сумма которой равна $-\frac{1}{2}$. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно и его сумма равна $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Замечание. В дальнейшем часто будет использоваться ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, который сходится при $|q|<1$, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$ (см. пример 3 §1).

Задачи для самостоятельного решения

Применяя признак Лейбница, показать, что данный ряд сходится:

114) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

115) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n+5)^2}$.

116) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

117) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\sqrt{n}}{n+20}$.

118) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\ln n}{n}$.

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

119) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$.

120) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{\ln n}$.

121) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}}{n+2}$.

122) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}(n-1)}{\sqrt[8]{n}(n+1)}$.

123) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

124) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \left(\dfrac{3n+1}{4n+5}\right)^{n}$.

125) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$.

126) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{10} e^{-n}$.

127) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n}{3n+2}$.

128) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{1000n+1}$.

129) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\ln n}{n}$.

130) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{n\ln^3 n}$.

131) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-\operatorname{arctg} n}$.

132) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)^2}{n^2+1}$.

133) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n^2+1}}$.

134) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

§4. Функциональные ряды

4.1. Область сходимости функционального ряда

Пусть дана бесконечная последовательность функций

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots,$$

имеющих общую область определения.

Функциональным рядом называется составленное из этих функций выражение вида

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \tag{1}$$

Функциональный ряд (1) при одних значениях аргумента x может оказаться сходящимся числовым рядом, а при других значениях аргумента x – расходящимся числовым рядом. Если функциональный ряд (1) сходится при $x=x_0$, то говорят, что ряд сходится в точке x_0.

Областью сходимости ряда (1) называется совокупность всех значений аргумента x, при которых этот ряд сходится.

Пример 1. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}5^n x^n. \tag{2}$$

Решение: Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда. А именно, найдём $\lim\limits_{n\to\infty}5^n x^n$. В случае $5|x|\geqslant 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}5^n x^n\neq 0$, значит необходимый признак не выполнен, поэтому при $|x|\geqslant\frac{1}{5}$ ряд расходится.

Пусть теперь $|x| < \frac{1}{5}$. Исследуем ряд (2) на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд из абсолютных величин ряда (2): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n|x|^n$. Воспользуемся признаком Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n|x|^n} = \lim_{n\to\infty} 5|x| = 5|x|.$$

Если $|x| < \frac{1}{5}$, то $5|x| < 1$ и ряд, составленный из абсолютных значений ряда (2) сходится, а значит ряд (2) при $|x| < \frac{1}{5}$ сходится абсолютно.

Итак, ряд (2) $\begin{cases} \text{при } |x| < \frac{1}{5} & \text{сходится абсолютно,} \\ \text{при } |x| \geqslant \frac{1}{5} & \text{расходится.} \end{cases}$

Таким образом, получаем область сходимости ряда (2): $|x| < \frac{1}{5}$.

Пример 2. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n(x+1)^n}, \quad x \neq -1. \tag{3}$$

Решение: Исследуем ряд на абсолютную сходимость, то есть исследуем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{1}{|x+1|^n}, \quad x \neq -1. \tag{4}$$

Воспользуемся признаком Коши сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n} \cdot \frac{1}{|x+1|^n}} = \frac{2}{|x+1|},$$

поэтому

при $\frac{2}{|x+1|} < 1$, то есть при $x < -3,\ x > 1$ ряд (4) сходится,
при $\frac{2}{|x+1|} > 1$, то есть при $-3 < x < 1,\ x \neq -1$ ряд (4) расходится.

Таким образом, при $x < -3,\ x > 1$ ряд (3) сходится абсолютно, а при $-3 < x < 1,\ x \neq -1$ ряд (3) расходится.

Теперь исследуем сходимость ряда (3) на границе области сходимости, то есть в точках $x = -3$ и $x = 1$. Пусть $x = -3$, тогда ряд (3) перепишется в виде $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. По признаку Лейбница этот ряд сходится (см. пример 1 §3). Пусть $x = 1$, тогда ряд (3) перепишется в виде $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$. Получили гармонический ряд, который расходится.

$$\text{Итак, ряд (3)} \begin{cases} \text{при} \quad x < -3, x > 1 & \text{сходится абсолютно,} \\ \text{при} \quad x = -3 & \text{сходится условно,} \\ \text{при} \quad -3 < x \leqslant 1 & \text{расходится.} \end{cases}$$

В итоге получаем, что ряд (3) сходится при $x \leqslant -3$ и при $x > 1$.

4.2. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда

Если члены $u_n(x)$ функционального ряда (1) являются степенными функциями аргумента x, то ряд называется степенным, то есть степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \\ = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \tag{5}$$

где x_0 – фиксированное число, а $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ – известные числовые коэффициенты. В частности, если $x_0 = 0$, то получаем степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{6}$$

Заметим, что степенные ряды (5) и (6) всегда сходятся при $x = x_0$ или $x = 0$ соответственно. Каждый степенной ряд (5) сходится внутри интервала сходимости $\{x : \ |x - x_0| < R\}$. Множество сходимости ряда (5) или совпадает с интервалом сходимости, или получается добавлением к нему одной или обеих концевых точек.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда. Если радиус сходимости $R = 0$, то множество сходимости ряда состоит из одной точки $x = x_0$. Если радиус сходимости $R = +\infty$, то множеством сходимости ряда является вся числовая прямая, то есть ряд сходится при любом $x \in (-\infty; +\infty)$. Если радиус сходимости есть число $R > 0$, то множество сходимости этого ряда представляет собой интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$, возможно, с добавлением к нему одной или обеих концевых точек.

Радиус сходимости R определяется по формуле Коши–Адамара

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{(если предел существует).} \tag{7}$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{(если предел существует).} \tag{8}$$

При $R \neq 0$ сходимость ряда (5) в точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ проверяется отдельно. Абсолютная сходимость ряда (5) на одном из концов интервала сходимости влечёт абсолютную сходимость ряда и на другом конце этого интервала.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}.$$

Решение: Так как $a_n = \frac{3^n}{n^2}$, то применим формулу (7).

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = 3 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{3}.$$

Для полного определения множества сходимости исследуем поведение этого ряда в точках $x = -\frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{3}$. Пусть $x = -\frac{1}{3}$, тогда $\frac{3^n}{n^2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится по признаку Лейбница. Теперь пусть $x = \frac{1}{3}$, тогда $\frac{3^n}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{n^2}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 15 §2).

Таким образом, множество сходимости данного ряда представляет собой отрезок $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \tag{9}$$

Решение: У этого ряда $a_n = \frac{1}{n}$. Применим формулу (8). Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале $(-1; 1)$. Теперь исследуем поведение ряда на границах найденного интервала, то есть при $x = -1$ и при $x = 1$. Если $x = -1$, то получаем ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots,$$

который сходится по признаку Лейбница. Если $x = 1$, то из (9) получаем гармонический ряд, который расходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $[-1; 1)$.

Пример 5. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Решение: Для данного ряда

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Применим формулу (8). Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Так как $R = +\infty$, то исследуемый ряд сходится при любом значении переменной x.

4.3. Действия со степенными рядами

Внутри общего интервала сходимости $|x - x_0| < R$ степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

справедливы равенства

а) сложение степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n,$$

б) умножение степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

$$\text{где } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0,$$

в) дифференцирование степенного ряда

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right]' = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n,$$

г) интегрирование степенного ряда

$$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+C,\ \text{где } C \text{ – любое число.}$$

Пример 6. Известно, что

$$\ln(1-x^3)=-x^3-\frac{x^6}{2}-\frac{x^9}{3}-\ldots-\frac{x^{3n}}{n}-\ldots \text{ при } |x|<1 \tag{10}$$

и

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots \text{ при } |x|<1. \tag{11}$$

Найти разложение в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$ функции $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ на интервале $(-1;1)$.

Решение: Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=\ln(1+x+x^2)=\ln\frac{1-x^3}{1-x}=\ln(1-x^3)-\ln(1-x).$$

Следовательно, используя свойство сложения двух степенных рядов и формулы (10) и (11), получим

$$\ln(1+x+x^2)=$$
$$=-x-\frac{x^2}{2}-\left(1+\frac{1}{3}\right)x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^6-\frac{x^7}{7}-\ldots,\quad |x|<1.$$

Пример 7. Разложить функцию $f(x)=\operatorname{arctg}x$ в степенной ряд с центром в точке 0 на интервале $(-1;1)$, если известно разложение функции

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\ldots,\quad |x|<1. \tag{12}$$

Решение: Поскольку

$$\operatorname{arctg}x=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2},$$

то, используя разложение (12) и свойство о почленном интегрировании степенных рядов, получим

$$\operatorname{arctg}x=\int\limits_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}+\ldots)\,dt=$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\quad |x|<1.$$

Пример 8. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

в степенной ряд с центром в точке 0 на интервале $(-1; 1)$, если известно разложение функции

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Решение: Воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots)' =$$
$$= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

Так как при дифференцировании интервал сходимости степенного ряда не меняется, то найденное разложение имеет место при x, удовлетворяющих условию $-1 < x < 1$.

Пример 9. Найти сумму ряда

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n} \quad \text{при } |x| < 1.$$

Решение: При решении задач такого типа используют известное разложение

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{при } |x| < 1 \text{ (см. замечание на с. 28)},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{1-x^p} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{pn}, \ |x| < 1$$

или в виде

$$\frac{1}{1+x^p} = \frac{1}{1-(-x^p)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^p)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{pn}, \ |x| < 1,$$

а также используют свойства дифференцируемости и интегрируемости степенных рядов.

Рассмотрим ряд

$$(13)\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots = x \cdot \left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots\right) =$$

$$= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = x \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} \quad \text{при } |x| < 1.$$

Продифференцируем этот ряд

$$(14)\quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}.$$

Последовательно учитывая (14) и (13), получаем ответ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1 - x^2 - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad \text{при } |x| < 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти область сходимости функционального ряда:

135) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^n}$.

136) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^{2n}+1}$.

137) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^{nx}-1}$.

138) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n$.

139) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

140) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1} \left(\dfrac{1+2x}{1+3x}\right)^n$.

141) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[5]{n}} \left(\dfrac{1+2x}{4+x}\right)^n$.

142) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{\sqrt[5]{n}(n+1)} \left(\dfrac{x}{3x-1}\right)^n$.

143) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \left(\frac{2+3x}{3+x}\right)^n$.

144) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} - \ln n} \left(\frac{1+x}{3+2x}\right)^n$.

145) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

146) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

147) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{\ln x}$.

148) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

149) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{a^n}$.

150) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{a^n}$, $a > 1$.

151) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{a^{nx}}$, $a > 1$.

152) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \left(\frac{x+5}{x+3}\right)^n$.

153) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2x+1}{x+5}\right)^n$.

Найти множество сходимости степенного ряда:

154) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

155) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$.

156) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (ax)^n$, $a \neq 0$.

157) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$.

158) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$.

159) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} - \ln n}$.

160) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$.

161) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

162) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

163) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5 x^n}{n+2}$.

164) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(\sqrt{n}+1)^n}$.

165) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!x^n}{n!}$.

166) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$.

167) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{n+5}$.

168) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \cdot 10^n}$.

169) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} x^n$.

Применяя почленное дифференцирование или интегрирование, найти сумму ряда:

170) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \ldots$

171) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$

172) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \ldots$

173) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^8}{8} + \ldots$

174) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{x^8}{8} + \ldots$

175) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots$

176) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

177) $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \ldots$

178) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$

§5. Ряды Тейлора. Разложение функции в степенной ряд

5.1. Ряды Тейлора

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Замечание. Как уже говорилось (см. §4), степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

радиусом сходимости которого является положительное число R, в интервале сходимости $(x_0-R; x_0+R)$ определяет функцию

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Функции $f(x)$ и $S(x)$ необязательно совпадают на интервале $(x_0-R; x_0+R)$.

Пример 1. Вычислив значение производных $f^{(n)}(x_0)$, написать 3 отличных от нуля члена ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

$$f(x) = 2^{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4, \quad n = 3.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
f(4) &= 4,\\
f'(4) &= \tfrac{\ln 2}{2} x^{-\frac{1}{2}} 2^{\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \ln 2,\\
f''(4) &= \tfrac{\ln 2}{4} \cdot \tfrac{2^{\sqrt{x}}}{x}\left(\ln 2 - x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{x=4} = \tfrac{\ln 2}{4}\left(\ln 2 - \tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Получаем окончательный ответ:

$$4 + \ln 2 \cdot (x-4) + \frac{\ln 2}{16} \cdot (2\ln 2 - 1) \cdot (x-4)^2 + \ldots$$

5.2. Разложение функции в степенной ряд

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда внутри его интервала сходимости (см. пункт 4.3), а также относительная простота степенной функции делают степенные ряды незаменимыми как в теоретических, так и в практических исследованиях. Естественно возникает вопрос о разложении функции в степенной ряд и исследовании области его сходимости.

Будем говорить, что функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на этом интервале, то есть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

В исследованиях о разложимости функции в степенной ряд основными являются следующие утверждения.

1) Если функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.
2) Для того чтобы функция $f(x)$ представлялась степенным рядом в окрестности точки x_0, необходимо, чтобы в некоторой окрестности этой точки функция $f(x)$ имела производные всех порядков.
3) Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в форме Лагранжа в формуле Тейлора для этой функции

$$R_n(f, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

стремился к нулю при $n \to \infty$ на указанном интервале.

Существуют различные методы разложения функции в степенной ряд.

а) Непосредственное разложение функции в ряд Тейлора.

В этом случае, находя $f^{(n)}(x_0)$, формально составляют ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

находят область сходимости этого ряда и анализируют, для каких значений переменной x из области сходимости справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение: Для вычисления коэффициентов ряда Тейлора, последовательно дифференцирем функцию $f(x)$:

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \ldots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \ldots$$

Вычислим значения самой функции и её производных при $x = 0$.

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = e^0 = 1, \ldots, \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \ldots$$

Составим для функции $f(x)$ ряд Тейлора.

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \tag{1}$$

Поскольку для радиуса сходимости R этого степенного ряда имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n + 1 = +\infty,$$

то ряд сходится при любом x.

Выясним, для каких значений x найденное разложение сходится к функции e^x. Так как

$$f^{(n+1)}(x) = e^x,$$

то остаточный член в форме Лагранжа запишется в виде

$$R_n(e^x, x, 0) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

для некоторого $\theta,\ 0 < \theta < 1$.

Для произвольного фиксированного $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(e^x, x, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} = 0.$$

Следовательно, ряд (1) сходится к функции e^x при любом $x \in (-\infty; +\infty)$.

Таким образом,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

где $-\infty < x < +\infty$.

Отметим, что метод разложения функции $f(x)$ в степенной ряд непосредственным вычислением её производных $f^{(n)}(x_0),\ n = 1, 2, 3, \ldots$ позволяет найти, как правило, только любое конечное число членов этого ряда, поскольку найти общую формулу для $f^{(n)}(x_0)$ бывает затруднительно, не говоря уже об исследовании сходимости ряда к функции $f(x)$.

б) Использование основных табличных разложений.

Для разложения конкретной функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ пользуются разложениями основных функций. После каждой формулы указано множество сходимости ряда.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad |x| < \infty, \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \\
& \qquad |x| < \infty, \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |x| < \infty, \\
\operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad |x| < \infty, \\
\operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |x| < \infty, \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \\
& \qquad -1 < x \leqslant 1, \\
\ln(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right), \quad -1 \leqslant x < 1, \\
(1+x)^m &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \\
& \quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \\
& \qquad m \in \mathbb{R}, \ |x| < 1.
\end{aligned}$$

Приведём некоторые частные случаи последней формулы.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad |x| < 1, \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1, \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \ldots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \ldots, \quad |x| < 1, \\
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \ldots, \quad |x| < 1, \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1, \\
\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \ldots - \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1} - \ldots, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

Напомним, что факториал натурального числа n определяется формулой

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

например, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Двойной факториал числа n определяется следующим образом

$$n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots,$$

например, $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$, $10!! = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$.

В частности,

$$(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1,$$
$$(2n)!! = (2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = e^{1-2x^3}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение: Поскольку $e^{1-2x^3} = e\cdot e^{-2x^3}$, то, полагая $-2x^3 = y$ и используя табличное разложение для функции e^y, имеем ряд

$$e^{1-2x^3} = e\cdot e^{-2x^3} = e\cdot e^y = e\cdot\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \ldots\right) =$$
$$= e\cdot\left(1 + (-2x^3) + \frac{(-2x^3)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-2x^3)^n}{n!} + \ldots\right) =$$
$$= e - 2ex^3 + \frac{2^2e}{2!}x^6 + \ldots + (-1)^n\frac{2^ne}{n!}x^{3n} + \ldots$$

Так как разложение в ряд функции e^y имеет место для всех y, то и разложение в ряд данной функции справедливо для всех $|x| < \infty$.

Пример 4. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение: Полагая $4x^2 = y$ и используя табличное разложение для функции $\frac{1}{1+y}$, имеем ряд

$$\frac{1}{1+4x^2} = 1 - 4x^2 + (4x^2)^2 - (4x^2)^3 + \ldots + (-1)^n(4x^2)^n + \ldots =$$
$$= 1 - 4x^2 + 16x^4 - 64x^6 + \ldots + (-1)^n 4^n x^{2n} + \ldots$$

Этот ряд представляет исходную функцию для x таких, что $|y| < 1$, то есть $|4x^2| < 1$, и значит для x из промежутка $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

в) Использование сложения и вычитания рядов.

В некоторых случаях разложение функции в степенной ряд можно получить, суммируя табличные или ранее найденные разложения.

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}.$$

Применяя известные разложения для функций $\frac{1}{1+y}$ и $\frac{1}{1-y}$, имеем

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \ldots, \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

и

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad |x| < 1,$$

следовательно получаем

$$(2)\quad f(x) = -\frac{1}{12}\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \ldots\right) - \\ -\frac{1}{4}(1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots) = \\ = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}x^2 + \ldots + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4} - \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)x^n + \ldots$$

Поскольку первый ряд сходится к функции $\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$ при $|x| < 3$, а второй – к функции $\frac{1}{1+x}$ при $|x| < 1$, то ряд (2) представляет функцию $\frac{1}{x^2-2x-3}$ при $|x| < 1$.

Пример 6. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ в точке $x_0 = 0$.

Решение: Представим данную функцию в виде

$$\ln(1 - x + x^2) = \ln\frac{1+x^3}{1+x} = \ln(1 + x^3) - \ln(1 + x).$$

Теперь разложим в степенной ряд каждую из функций $\ln(1+x^3)$ и $\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned} \ln(1 + x^3) &= x^3 - \tfrac{x^6}{2} + \tfrac{x^9}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^{3n}}{n} + \ldots, \quad |x^3| < 1,\ |x| < 1, \\ \ln(1 + x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n} + \ldots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln(1 - x + x^2) = \\ = x - \frac{x^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^6 + \frac{x^7}{7} - \ldots, \quad |x| < 1.$$

Для разложения функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 \neq 0$ часто применяется следующий метод: вводится новая переменная $t = x - x_0$ и ищется разложение функции $f^*(t) = f(t+x_0)$ в степенной ряд по степеням t (с центром в точке $t_0 = 0$)

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad |t| < R,$$

откуда получаем, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R.$$

Пример 7. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = -3$.

Решение: Обозначим $t = x + 3$, тогда $x = t - 3$, следовательно

$$f(x) = f^*(t) = \frac{1}{t-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{3}}.$$

Полагаем $\frac{t}{3} = y$ и, используя табличное разложение для функции $\frac{1}{1-y}$, имеем ряд

$$f^*(t) = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{t}{3} + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{t}{3}\right)^n + \ldots\right),$$

$$|y| < 1, \quad \left|\frac{t}{3}\right| < 1, \quad -3 < t < 3.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{3} - \frac{(x+3)}{3^2} - \frac{(x+3)^2}{3^3} - \ldots - \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}} - \ldots,$$

$$-3 < x + 3 < 3, \quad -6 < x < 0.$$

г) Почленное интегрирование рядов.

Пусть функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt,$$

где разложение

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n$$

внутри интервала $|t - x_0| < R$ известно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad |x - x_0| < R.$$

Пример 8. Разложить функцию

$$f(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ на интервале $|x| < 1$.

Решение: Разлагая функцию $\frac{\ln(1+t)}{t}$ в степенной ряд с центром в точке $t_0 = 0$ и интегрируя почленно полученный ряд, имеем

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \int\limits_0^x \frac{1}{t}\left(t - \frac{t^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + \ldots\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n} + \ldots\right) dt, \quad -1 < t \leqslant 1,\ t \neq 0.$$

Следовательно,

$$f(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

Это разложение верно и в точке $x = 0$, то есть для всех $|x| < 1$, см. также пример 7 §4.

д) Почленное дифференцирование рядов.

Пусть надо найти разложение некоторой функции в степенной ряд. Если удастся найти такую функцию $g(x)$, что $f(x) = g'(x)$, то, разложив функцию $g(x)$ в степенной ряд и продифференцировав его почленно, получим разложение в ряд функции $f(x)$. При этом полученное разложение верно на том же интервале, где соответствующее разложение верно для функции $g(x)$.

Пример 9. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение: Поскольку $\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)'$, то имеем

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots)' =$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n x^{n-1} + \ldots$$

Так как при дифференцировании интервал сходимости степенного ряда не меняется, то найденное разложение имеет место при $-1 < x < 1$, см. также примеры 8 и 9 §4.

Задачи для самостоятельного решения

Написать разложение функции в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и найти множество сходимости полученного ряда:

179) $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

180) $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
181) $a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$.
182) $x^2 e^{-2x}$.
183) $\sin x^2$.
184) $\sin^2 x$.
185) $\cos^2 x$.
186) $\sin^3 x$.
187) $\dfrac{1}{1-x^2}$.
188) $\dfrac{1}{1+x^4}$.
189) $\dfrac{1}{1+2x}$.
190) $\dfrac{3}{4-x}$.
191) $\dfrac{1}{3+2x}$.
192) $\dfrac{1}{2+3x^2}$.
193) $\dfrac{5x-1}{x^2-5x+6}$.
194) $\dfrac{2x+3}{x^2-4x+3}$.
195) $\dfrac{x-7}{6-x-x^2}$.
196) $\ln(1-x^2)$.
197) $\ln\sqrt[5]{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
198) $\ln\dfrac{1+3x}{1-3x}$.
199) $\ln(1+5x)$.
200) $\ln(5+2x)$.
201) $\ln(1+2x^2)$.
202) $\ln\dfrac{2x+1}{3x+1}$.
203) $\ln(x^2-5x+4)$.
204) $\ln(x^2-10x+9)$.
205) $\ln(6+x-x^2)$.
206) $\ln(1-x+x^2)$.
207) $\ln(1+x+x^2)$.
208) $\sqrt{1+x^2}$.

209) $\sqrt[5]{1+x}$.
210) $\sqrt[3]{27+x}$.
211) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
212) $\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$.
213) $x\arcsin x$.
214) $x^2 \operatorname{arctg} x$.
215) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.
216) $\arcsin 3x$.
217) $\ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right)$.
218) $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.
219) $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.
220) $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$.

Написать разложение функции в степенной ряд с центром в точке x_0 и найти множество сходимости полученного ряда:

221) $x^3-x,\ x_0=-1$.
222) $e^x,\ x_0=-2$.
223) $\dfrac{1}{x},\ x_0=-3$.
224) $\sqrt{x},\ x_0=4$.
225) $\sqrt[3]{x},\ x_0=-1$.
226) $\dfrac{1}{2-x-x^2},\ x_0=-3$.
227) $\dfrac{1}{x^2+3x+2},\ x_0=-4$.
228) $\ln x,\ x_0=1$.
229) $\sin 3x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{3}$.
230) $\sin\dfrac{\pi x}{4},\ x_0=2$.
231) $\sin\dfrac{\pi x}{3},\ x_0=1$.

§6. Приложения степенных рядов

6.1. Приложения рядов к приближённым вычислениям

Разложения основных элементарных функций в степенной ряд (см. §5) можно использовать для приближённого вычисления значений этих функций.

Пусть надо найти $f(x_0)$ для функции $f(x)$, которая раскладывается в степенной ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \quad |x|<R, \quad x_0\in(-R;R). \tag{1}$$

Тогда

$$f(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots$$

Заменяя значение $f(x_0)$ суммой n членов этого ряда

$$S_n=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_{n-1}x_0^{n-1},$$

получаем приближённое значение $f(x_0)$, при этом ошибка равна

$$|r_n(x)|=|a_nx_0^n+a_{n+1}x_0^{n+1}+\ldots|. \tag{2}$$

В силу сходимости ряда (1) в точке $x=x_0$, при достаточно большом n эта ошибка станет сколь угодно малой и S_n даёт значение $f(x_0)$ с любой наперёд заданной точностью. Для вычисления $f(x_0)$ с заданной точностью надо уметь производить оценку остатка (2), что позволяет брать требуемое число членов в S_n.

Оценка остатка ряда особенно проста, если ряд удовлетворяет признаку Лейбница (см. пункт 3.1). В этом случае остаток имеет знак своего первого члена и по абсолютной величине меньше его.

В случае произвольного ряда абсолютная величина r_n не превосходит суммы абсолютных величин членов, входящих в r_n. Для уже полученного положительного ряда стараются найти легко суммируемый ряд из положительных членов, члены которого были бы не меньше абсолютных величин членов остатка, и оценивают остаток суммой этого ряда.

Пример 1. Вычислить с точностью до 10^{-4} значение $\cos 18^\circ$.

Решение:

$$\cos 18^\circ=\cos\frac{\pi}{10}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{\pi^{2n}}{10^{2n}}.$$

Так как этот ряд удовлетворяет признаку Лейбница, то его остаток r_n не превышает по абсолютной величине первого из членов в r_n. Найдём n из

условия
$$|r_n| < 10^{-4}, \quad \text{то есть } \frac{\pi^{2n}}{(2n)! \cdot 10^{2n}} < 10^{-4}.$$

При $n = 1$ имеем
$$\frac{\pi^2}{2! \cdot 10^2} = \frac{\pi^2}{200} > \frac{3^2}{200} > 10^{-4}.$$

При $n = 2$
$$\frac{\pi^4}{4! \cdot 10^4} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{\pi \cdot \pi \cdot \pi^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} > 10^{-4}.$$

При $n = 3$
$$\frac{\pi^6}{6! \cdot 10^6} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{\pi^6}{6! \cdot 10^2} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{\pi^6}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{\pi}{2^4} \cdot \frac{\pi^2}{6^2} \cdot \frac{\pi^3}{5^3} < 10^{-4}.$$

Следовательно для получения заданной точности достаточно взять три члена разложения. Имеем
$$\cos 18^\circ = 1 - \frac{\pi^2}{2! \cdot 10^2} + \frac{\pi^4}{4! \cdot 10^4} \approx 0,951.$$

Пример 2. Вычислить с точностью до 10^{-4} значение $\sqrt[4]{630}$.

Решение:
$$\sqrt[4]{630} = \sqrt[4]{625 + 5} = \sqrt[4]{625(1 + 0,008)} = 5\sqrt[4]{1 + 0,008} = 5(1 + 0,008)^{\frac{1}{4}}.$$

Используем разложение в ряд функции $(1+x)^m$. Полагая $x = 0,008$ и $m = \frac{1}{4}$, получим следующее разложение
$$(1 + 0,008)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,008 - \frac{3}{16 \cdot 2!}(0,008)^2 + \frac{3 \cdot 7}{64 \cdot 3!}(0,008)^3 - \ldots =$$
$$= 1 + 0,002 - 0,000006 + 0,000000028 - \ldots$$

Этот ряд удовлетворяет признаку Лейбница. Поэтому его остаток не превосходит по абсолютной величине первого из членов, входящих в остаток. В случае $n = 3$ $|r_3| \leqslant 5 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$. Следовательно, достаточно взять два члена ряда
$$\sqrt[4]{630} = 5\sqrt[4]{1 + 0,008} = 5(1 + 0,002) = 5,01.$$

Пример 3. Вычислить с точностью до 10^{-3} интеграл
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^2}}.$$

Решение:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{3}}\, dx.$$

Разложим подынтегральную функцию вида $(1+x)^m$ в степенной ряд (в данном случае $m = -\frac{1}{3}$) и заменим x на x^2.

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \ldots$$

Так как отрезок интегрирования $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ принадлежит области сходимости полученного ряда $(-1; 1)$, то можно интегрировать почленно в указанных пределах

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{9} + \frac{2x^5}{45} - \frac{14x^7}{567} + \ldots\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} - \frac{7}{36288} + \ldots$$

В полученном знакочередующемся ряде четвёртый член по абсолютному значению меньше $0,001$. Следовательно, требуемая точность будет обеспечена, если учитывать только первые три члена ряда.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} = \frac{39}{80} = 0,4875.$$

Так как первый из отброшенных членов имеет знак минус, то полученное приближённое значение будет с избытком. Поэтому ответ с точностью до $0,001$ равен $0,487$.

Пример 4. Вычислить значение $\ln 2$ с точностью до 10^{-4}.

Решение: Пользуясь разложениями

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \leqslant 1, \\ \ln(1-x) &= -x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} - \ldots - \tfrac{x^n}{n} - \ldots, \quad -1 \leqslant x < 1 \end{aligned}$$

получим, что

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \ldots + \frac{2}{2m+1}x^{2m+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Полагая $x = \frac{1}{3}$, имеем

$$\ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \ln 2 = 2\cdot\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4^4\cdot 3} + \frac{1}{3^5\cdot 5} + \frac{1}{3^7\cdot 7} + \ldots\right).$$

Заданную точность обеспечивают четыре члена этого ряда, поскольку

$$r_5 = 2\cdot\left(\frac{1}{3^9\cdot 9} + \frac{1}{3^{11}\cdot 11} + \ldots\right) = \frac{2}{3^9\cdot 9}\cdot\left(1 + \frac{1}{3^2\cdot 11} + \frac{1}{3^4\cdot 13} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{2}{3^9\cdot 9}\cdot\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) = \frac{2}{3^9\cdot 9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} < 10^{-4}.$$

Поэтому

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{405} + \frac{1}{5103}\right) \approx 0,6931.$$

Заметим, что попытка вычислить $\ln 2$ путём подстановки $x = 1$ в ряд Тейлора для функции $\ln(1+x)$ приведёт к очень громоздким вычислениям, так как для нужной точности придётся взять 1000 членов ряда.

6.2. Применение рядов для решения дифференциальных уравнений

Пусть требуется решить обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ при заданных начальных условиях $y = y_0$ при $x = x_0$, то есть $y(x_0) = y_0$. Предположим, что $y(x)$ является решением данного уравнения при указанном условии. Решение уравнения $y(x)$ ищем в виде ряда Тейлора в окрестности точки $x = x_0$.

$$(3)\quad y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Свободный член разложения (3), то есть $y(x_0)$, известен из начального условия. Значение $y'(x_0)$ можно получить, если подставить начальное условие в дифференциальное уравнение. Значение $y''(x_0)$ можно получить, если продифференцировать обе части дифференциального уравнения, а затем подставить уже известные значения $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ при $x = x_0$. Поступая аналогично, то есть последовательно дифференцируя обе части заданного дифференциального уравнения по переменной x, можно последовательно находить значения $y'''(x_0), y^{IV}(x_0)$ и так далее.

Пример 5. Найти частное решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = 2xy - x\cos x$, соответствующее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение: Так как по условию $x_0 = 0$, то искомое частное решение $y(x)$ можно записать так

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \tag{4}$$

Свободный член $y(0) = 1$ по условию. Значение $y'(0)$ находим, подставляя в заданное уравнение начальные условия:

$$y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot \cos 0 = 0.$$

Последовательно дифференцируя данное дифференциальное уравнение, находим $y''(x), y'''(x), y^{IV}(x)$ и так далее, а затем вычисляем значения производных при $x = 0$:

$$\begin{array}{rcll} y''(x) & = & 2y + 2xy' - \cos x + x\sin x, & y''(0) = 1, \\ y'''(x) & = & 2y' + 2y' + 2xy'' + \sin x + \sin x + x\cos x = & \\ & = & 4y' + 2xy'' + 2\sin x + x\cos x, & y'''(0) = 0, \\ y^{IV}(x) & = & 4y'' + 2y'' + 2xy''' + 2\cos x + \cos x - x\sin x, & y^{IV}(0) = 9. \end{array}$$

Подставив найденные значения производных при $x = 0$ в ряд (4), получим первые члены разложения в степенной ряд искомого частного решения

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{9}{4!}x^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \ldots$$

Пример 6. Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения $y(x)$ дифференциального уравнения $y'' = xy' - y + e^x$, соответствующее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение: Предположим, что искомое частное решение имеет вид (4). Из начальных условий уже известны $y(0)$ и $y'(0)$. Подставив эти значения в заданное уравнение, вычислим $y''(0)$.

$$y''(0) = 0 \cdot 0 - 1 + e^0 = 0.$$

Последовательно дифференцируя данное уравнение, будем иметь

$$y'''(x) = y' + xy'' - y' + e^x = xy'' + e^x,$$
$$y^{IV}(x) = y'' + xy''' + e^x.$$

Теперь вычислим значения производных при $x = 0$.

$$y'''(0) = 1, \quad y^{IV}(0) = 1.$$

Следовательно,

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$$

есть искомое частное решение.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить с точностью до 10^{-3}:

232) $\sqrt[3]{10}$.

233) $\sqrt{e}$.

234) $\sqrt[3]{30}$.

235) $\sin 18^\circ$.

236) $\arcsin\dfrac{1}{3}$.

237) $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

238) $\displaystyle\int\limits_0^{1} e^{-x^2} dx$.

239) $\displaystyle\int\limits_0^{3/2} x^6 \sin x\,dx$.

240) $\displaystyle\int\limits_2^{3} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx$.

241) $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \sqrt{x}e^x dx$.

Вычислить с точностью до 10^{-4}:

242) $\ln 3$.

243) $\ln 6$.

244) Вычислить значение $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-5}, исходя из его представления в виде

а) $\sqrt{2} = 1,4\sqrt{1+\dfrac{0,04}{1,96}}$,

б) $\sqrt{2} = 1,4\left(1-\dfrac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

в) $\sqrt{2} = 1,41\left(1-\dfrac{119}{2000}\right)^{-\frac{1}{2}}$

и сравнить объём проведённых вычислений в каждом случае.

245)* Доказать, что при приближённом вычислении значения выражения $\sqrt{a^2+b}$, $b>0$ по формуле $\sqrt{a^2+b} = a\left(1+\dfrac{b}{2a^2}\right)$ ошибка не превосходит числа $\dfrac{b^2}{8a^3}$.

246)* Доказать, что при приближённом вычислении значения выражения $\sqrt[3]{a^3+b}$, $ab>0$ по формуле $\sqrt[3]{a^3+b} = a\left(1+\dfrac{b}{3a^3}\right)$ ошибка не превосходит числа $\dfrac{b^2}{9a^5}$.

247)* Оценить ошибку при приближённом вычислении значения выражения $\sqrt[n]{a^n+b}$, $a>0$, $b>0$ по формуле $\sqrt[n]{a^n+b} = a+\dfrac{b}{na^{n-1}}$.

Найти n первых членов разложения в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями:

248) $y' = y^2 - x, \quad x_0 = 0, \quad y(0) = 1, \quad n = 5.$

249) $y' = x^2 - y^2, \quad x_0 = 0, \quad y(0) = 1, \quad n = 5.$

250) $y' = x^3 + y^2, \quad x_0 = 0, \quad y(0) = 1, \quad n = 5.$

251) $y' = x + \dfrac{1}{y}, \quad x_0 = 0, \quad y(0) = 1, \quad n = 4.$

252) $y' = 2x + \cos y, \quad x_0 = 0, \quad y(0) = 0, \quad n = 4.$

253) $2y' - (x+y)y - e^x = 0, \quad x_0 = 0, \quad y(0) = 2, \quad n = 4.$

Найти частное решение дифференциального уравнения в окрестности точки $x=0$ в виде степенного ряда с центром в нуле:

254) $xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

255) $xy'' + y' - xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

256) $xy'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

257) $x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

§7. Ряды Фурье

Рядом Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l; l)$ называется ряд вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Знак $\sim$ означает, что функции $f(x)$ ставится в соответствие тригонометрический ряд по данной формуле.

В случае, когда $l = \pi$, то есть $f(x)$ задана на интервале $(-\pi; \pi)$, ряд Фурье функции $f(x)$ записывается в виде

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

В частности, если функция $f(x)$ чётная на $(-l; l)$, то все коэффициенты b_n равны нулю, так как в формуле (3) интеграл берётся от нечётной функции по симметричному относительно нуля интервалу. В формуле (2) в этом случае интеграл берётся от чётной функции по симметричному относительно нуля интервалу, поэтому этот интеграл равен удвоенному интегралу от той же функции по интервалу $(0; l)$.

Итак, в случае чётной функции $f(x)$ на интервале $(-l; l)$ имеем

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \tag{7}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{8}$$

Аналогично, если функция $f(x)$ является нечётной на интервале $(-l; l)$, то получаем

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{9}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Точка $x_0 \in (-l; l)$ называется регулярной точкой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-l; l)$, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+0), \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0) \tag{11}$$

и

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right). \tag{12}$$

Заметим, что все точки непрерывности функции являются её регулярными точками.

Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на интервале $(-l; l)$, если

1) множество M точек разрыва функции $f(x)$ на $(-l; l)$ конечно, и каждая точка $x_0 \in M$ есть точка разрыва первого рода,
2) функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $(-l; l)$ за исключением конечного числа точек M_1 $(M \subset M_1)$,
3) для каждой точки $x_0 \in M_1$ существуют пределы

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0-0) - f(x_0-h)}{h}.$$

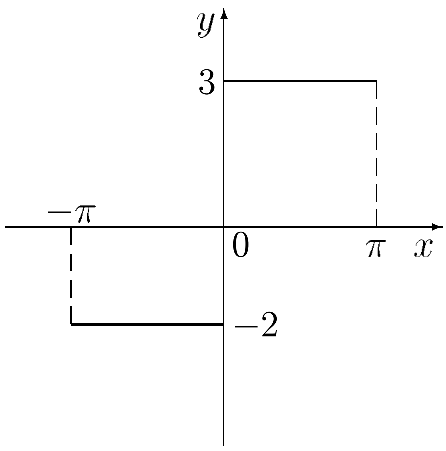
Чтобы ряд Фурье (1) функции $f(x)$ на интервале $(-l; l)$ сходился к функции $f(x)$, заданная функция $f(x)$ на $(-l; l)$ должна удовлетворять определённым условиям. Сформулируем теорему разложения.

Если функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на интервале $(-l; l)$, то для любой регулярной точки $x_0 \in (-l; l)$ ряд Фурье (1) функции $f(x)$ в точке x_0

сходится к $f(x_0)$.

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x_0}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x_0}{l} \right).$$

Пример 1. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$.



$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 3, & \text{если } \ 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Решение: Заданная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о разложимости в ряд Фурье, так как на интервале $(-\pi; \pi)$ функция имеет одну точку разрыва первого рода (при $x = 0$), а во всех других точках этого интервала она дифференцируема. Следовательно, для данной функции справедливо равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Чтобы найти коэффициент a_0, применяем формулу (5) при $n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} -2\, dx + \int_{0}^{\pi} 3\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left([-2x]_{-\pi}^{0} + [3x]_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}(-2\pi + 3\pi) = 1.$$

Теперь находим коэффициенты a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ по формуле (5).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} -2 \cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 3 \cos nx\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-2 \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{3 \sin nx}{n} \right]_{0}^{\pi} \right) = 0.$$

Пользуясь формулой (6) определим коэффициенты b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} -2\sin nx\,dx + \int\limits_{0}^{\pi} 3\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{2\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{-3\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}(2 - 2\cos(-n\pi) - 3\cos n\pi + 3) =$$

$$= \frac{5}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{5}{n\pi}2\sin^2\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{10}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

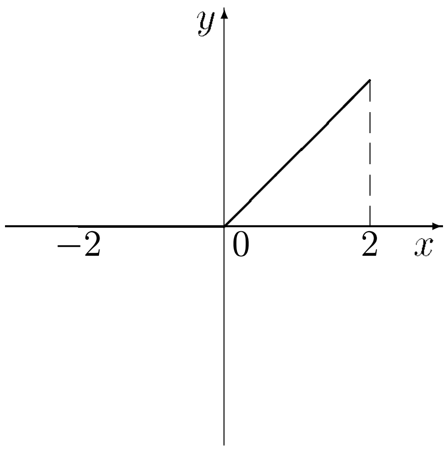
Подставив найденные коэффициенты a_n и b_n в формулу (4), получим следующее разложение в ряд Фурье данной функции $f(x)$ на заданном интервале $(-\pi;\pi)$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{10}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \dots\right).$$

Полученное равенство справедливо при любом значении x, исключая точку разрыва $x = 0$, в которой сумма ряда равна $\dfrac{-2+3}{2} = \dfrac{1}{2}$, то есть равна среднему арифметическому значений данной функции слева и справа от точки разрыва.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-2;2)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 < x < 0, \\ x, & \text{если } \ 0 \leqslant x < 2. \end{cases}$$



Решение: Для вычисления коэффициентов Фурье применим формулы (2) и (3), подставив в них $l = 2$ и учитывая при этом, что функция задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения переменной x.

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{2} x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} 0\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left[x\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{4}}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном,} \end{cases}$$

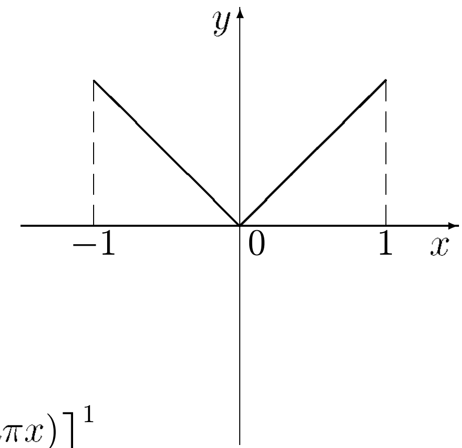
$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} 0\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left[-x\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{4}}\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (1), получим искомое разложение заданной функции $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right) +$$
$$+ \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{2} + \ldots\right).$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на интервале $(-1; 1)$.



Решение: Эта функция является чётной. Для вычисления коэффициентов Фурье полагаем $l = 1$ в формуле (8).

$$a_0 = \frac{2}{1}\int\limits_0^1 x\,dx = 2\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1,$$

$$a_n = 2\int\limits_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx = 2\left[\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 =$$

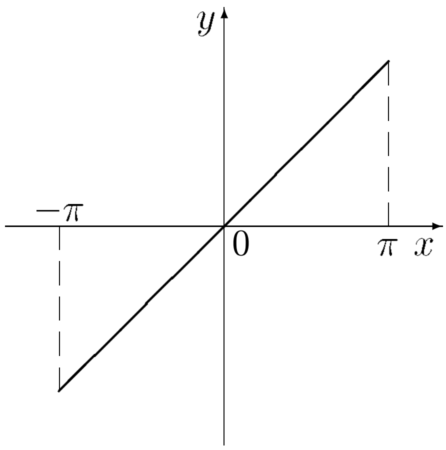
$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (7), получим искомое разложение заданной функции в ряд Фурье.

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \ldots\right).$$

Полученное равенство справедливо при любом $x \in (-1; 1)$.

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $(-\pi; \pi)$.



Решение: Так как данная функция является нечётной, то коэффициенты $a_n = 0$. Полагая $l = \pi$ в формуле (6), находим коэффициенты b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x \sin nx\, dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi =$$
$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ -\frac{2}{n} & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\right).$$

Функцию $f(x)$, определённую в интервале $(0; l)$ и обладающую в нём приведёнными в теореме разложения свойствами (см. с. 58), можно в этом интервале представить как формулой (7), так и формулой (9).

Пример 5. Разложить в ряд по косинусам функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ на интервале $(0; \pi)$.

Решение: Для определения коэффициентов Фурье в ряде (7) применим формулу (8).

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right]_0^\pi = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi (\pi - 2x)\cos nx\, dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[(\pi - 2x)\frac{\sin nx}{n} - \frac{2\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi} =$$
$$= \frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi} = \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Следовательно, получаем следующее разложение

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right).$$

Пример 6. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(0;1)$ в ряд по синусам.

Решение: Для определения коэффициентов Фурье в ряде (9) применим формулу (10).

$$b_n = 2\int\limits_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx = 2\left[-x\cdot\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечётном},\\ -\frac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ чётном}.\end{cases}$$

Следовательно, получаем следующее разложение

$$x = \frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x - \frac{1}{4}\sin 4\pi x + \ldots\right).$$

В силу одинаковой периодичности тригонометрических функций, ряд Фурье (1), представляющий функцию $f(x)$ на $(-l;l)$, представляет в каждом отрезке $[a;b] \supset (-l;l)$ функцию $f^*(x)$, полученную $2l$ периодическим продолжением функции $f(x)$ с интервала $(-l;l)$ на всю числовую прямую за исключением точек вида $(2m+1)l,\ m \in \mathbb{Z}$. Значения $f^*((2m+1)l),\ m \in \mathbb{Z}$ выбираются произвольно. Если определены значения $f(l-0)$ и $f(-l+0)$ (см. (11)), то обычно полагают

$$f^*((2m+1)l) = \frac{1}{2}\left(f(l-0) + f(-l+0)\right),\ m \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому, если функция $f^*(x)$ удовлетворяет условию (12) в точке $x = l$, то ряд (1) сходится в точках $x = (2m+1)l,\ m \in \mathbb{Z}$ к функции $f^*((2m+1)l)$.

Задачи для самостоятельного решения

Разложить функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на заданном отрезке:

258) $f(x) = x\sin x$ на $[-\pi;\pi]$.

259) $f(x) = x\cos x$ на $[-\pi;\pi]$.

260) $f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi < x \leqslant 0,\\ ax, & 0 < x < \pi \end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

261) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ на $[0; \pi]$.

262) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leqslant 0, \\ 1 - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ на $[-\pi; \pi]$.

263) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leqslant x < 0, \\ x + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ на $[-1; 1]$.

264) $f(x) = x^2$ на $[-\pi; \pi]$.

265) $f(x) = x^2$ на $[0; 2\pi]$.

266) $f(x) = x^2$ на $[0; \pi]$.

267) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi, \\ -x^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ на $[-\pi; \pi]$.

268) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ на $[-\pi; \pi]$.

269) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 2, \\ 0, & 2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ на $[-\pi; \pi]$.

270) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2, \\ 0, & 2 \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$ на $[0; 2\pi]$.

271) $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$ на $[-\pi; \pi]$.

272) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$ на $[-\pi; \pi]$.

273) $f(x) = \begin{cases} 0, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant |x| \leqslant \pi, \\ \cos x, & |x| < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ на $[-\pi; \pi]$.

274) $f(x) = \sin^5 x$ на $[-\pi; \pi]$.

275) $f(x) = \cos^4 x$ на $[-\pi; \pi]$.

276) $f(x) = \arcsin(\cos x)$ на $[-10\pi; 10\pi]$.

277) $f(x) = \arcsin(\sin x)$ на $[6\pi; 20\pi]$.

278) $f(x) = \operatorname{ch} x$ на $[-\pi; \pi]$.

279) $f(x) = \operatorname{sh} x$ на $[-\pi; \pi]$.

280) $f(x) = \sin x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

281) $f(x) = \cos x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

282) $f(x) = \cos x$ на $[0; \pi]$.

283) $f(x) = \begin{cases} -1, & -c < x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x < c \end{cases}$ на $[-c; c]$.

284) $f(x) = \begin{cases} 0, & -c < x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x < c \end{cases}$ на $[-c; c]$.

285) $f(x) = x$ на $[-c; c]$.

286) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant c, \\ 0, & -c < x \leqslant 0 \end{cases}$ на $[-c; c]$.
287) $f(x) = |x|$ на $[-c; c]$.
288) $f(x) = x^2$ на $[-1; 1]$.
289) $f(x) = x^2$ на $[0; 2]$.
290) $f(x) = c^2 - x^2$ на $[-c; c]$.
291) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, на $[0; 2]$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке по косинусам:
292) $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$.
293) $f(x) = x \cos x$ на $[0; \pi]$.
294) $f(x) = e^{2x}$ на $[0; \pi]$.
295) $f(x) = \sin 2x$ на $[0; \pi]$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке по синусам:
296) $f(x) = \cos x$ на $[0; \pi]$.
297) $f(x) = x \sin x$ на $[0; \pi]$.
298) $f(x) = e^{ax}$ на $[0; \pi]$.
299) $f(x) = \sin ax$, a – не целое, на $[0; \pi]$.
300) $f(x) = \operatorname{sh} ax$ на $[0; \pi]$.

ГЛАВА II

Теория функций комплексного переменного

§1. Комплексные числа и действия над ними

1.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексными числами (в алгебраической форме) называются выражения вида

$$z = x + iy,$$

где i – символ, называемый мнимой единицей, x и y – произвольные действительные числа. $x = \operatorname{Re} z$ – называется действительной частью числа z, $y = \operatorname{Im} z$ – называется мнимой частью числа z.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Два комплексных числа z_1 и z_2 называются равными

$$z_1 = z_2, \text{ если } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

2. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

3. Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_3 = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Умножение комплексных чисел производится по правилу умножения двучленов.

Из определения произведения комплексных чисел следует, что

$$i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжённым комплексному числу $z = x + iy$.

4. Операция деления комплексного числа z_1 на комплексное число z_2, если $z_2 \neq 0$, определяется как обратная к умножению, т.е.

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{если } z_1 = z z_2.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{z_1}{z_2} = z = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Заметим, что эту формулу удобнее записать в виде:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}.$$

Пример 1. Пусть $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 4 + 5i$. Вычислить

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение:

$$z_1 + z_2 = (-2 + 4) + i(3 + 5) = 2 + 8i,$$
$$z_1 - z_2 = (-2 - 4) + i(3 - 5) = -6 - 2i,$$
$$z_1z_2 = (-2 + 3i)(4 + 5i) = -8 + 12i - 10i - 15 = -23 + 2i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(-2 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{7 + 22i}{41} = \frac{7}{41} + i\frac{22}{41}.$$

Пример 2. Доказать равенство $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$.
Решение: Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Поэтому

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\operatorname{Re} z.$$

1.2. Комплексная плоскость

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0, 0)$, а конец в точке $M(x, y)$.

Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, будем называть комплексной плоскостью.

Пример 3. Построить на комплексной плоскости точки, изображающие следующие комплексные числа: $z_1 = 3i, z_2 = -4i, z_3 = 5, z_4 = 1 + 2i, z_5 = -2 + 3i, z_6 = -1 - i, z_7 = 2 - 4i$.

Решение:

Операции сложения и вычитания комплексных чисел удобнее производить в алгебраической форме. Геометрически сложение и вычитание чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения и вычитания векторов

Отсюда следует, что $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2, а уравнение $|z - z_0| = R$ задаёт окружность радиуса R с центром в точке z_0.

Пример 4. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$\begin{array}{ll} 1) & |\operatorname{Im} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1; \\ 2) & |z - 1 - 2i| < 2; \\ 3) & 1 < |z + 2 + i| < 3; \\ 4) & |z - i| > 1. \end{array}$$

Решение:

1) прямоугольник с вершинами в точках $-i, 1 - i, 1 + i, i$ (стороны не включаются);

2) круг радиусом 2 с центром в точке $z = 1 + 2i$ (окружность не включается);

3) кольцо между окружностями радиусов 1 и 3 с общим центром в точке $z = -2 - i$ (окружности не включаются);

4) вся плоскость, из которой удалён круг радиуса 1 с центром в точке $z = i$ вместе с его окружностью.

1.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Длина вектора z называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором z называется аргументом z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Он определён не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Для $z = 0$ понятие аргумента не определено.

Главное значение аргумента определяется формулой:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если} \quad x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{если} \quad x < 0, y \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{если} \quad x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Пользуясь этими понятиями, комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z)).$$

Пример 5. Записать число $z = -8 - i8\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.
Решение:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16.$$

Так как

$$x = -8 < 0, \qquad y = -8\sqrt{3} < 0,$$

то

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Поэтому

$$z = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z)) =$$
$$= 16(\cos(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k)), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Операции умножения и деления приобретают наглядный геометрический смысл в тригонометрической форме, а именно:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i\sin(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2))$$

и

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) + i\sin(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2)).$$

Из правила умножения следует также, что

$$z^n = |z|^n(\cos(n\operatorname{Arg} z) + i\sin(n\operatorname{Arg} z)).$$

Операция извлечения корня степени n из комплексного числа определяется как обратная к операции возведения в степень, а именно, комплексное число z называется корнем степени n из числа w и обозначается $\sqrt[n]{w} = z$, если $z^n = w$. Корень n-й степени числа $w (w \neq 0)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

где через $\sqrt[n]{|w|}$ обозначено арифметическое значение корня из положительного числа.

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$.

Решение: Воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа $-8 - i8\sqrt{3}$, найденной в примере 5:

$$\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right)\right)} =$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right)\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Положим последовательно $k = 0, 1, 2, 3$. Будем иметь:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i,$$
$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 + i\sqrt{3},$$
$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i,$$
$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие следующим комплексным числам:

1) $a)$ $z = 3$; $b)$ $z = -2$; $c)$ $z = -2i$; $d)$ $z = 3i$; $e)$ $z = 2 + i$; $f)$ $z = -2 + 3i$ $g)$ $z = -3 - 4i$; $k)$ $z = 3 - 2i$.

Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$:

2) $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 1 + i.$
3) $z_1 = 17 - i,\ z_2 = 2 - i.$
4) $z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 7 + 2i.$
5) $z_1 = 4 - 5i,\ z_2 = 1 - 3i.$

Выполнить указанные действия:

6) $(2 + 3i)(3 - 2i) + (2 - 3i)(3 + 2i).$
7) $(5 - 2i)^2.$
8) $(1 + 2i)^2 - (1 - 2i)^2.$
9) $(3 + i)^3.$
10) $\dfrac{3 + i}{6 - 5i}.$
11) $\dfrac{3 - i}{4 + 5i}.$
12) $\dfrac{2 + 3i}{2 + i}.$
13) $\dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}.$
14) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}.$

Найти действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

15) $\dfrac{1}{1 - i}.$

16) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

17) $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

18) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

19) i.

20) -3.

21) $1+i^{123}$.

22) $3i$.

23) $1+i$.

24) $\sqrt{3}-i$.

25) $-1-i\sqrt{3}$.

26) $1-i\sqrt{3}$.

27) $-i\sqrt{2}$.

28) $3+4i$.

29) $-3-4i$.

30) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

31) $\dfrac{1-i}{1+i}$.

32) $-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

33) $(-4+3i)^3$.

34) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

35) $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Доказать равенства:

36) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$.

37) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$.

38) $\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$.

39) $\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

40) $\overline{(\bar{z})}=z$.

41) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

42) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.

43) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.

44) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
45) $|\bar{z}| = |z|$.
46) $\bar{z}z = |z|^2$.

Дать геометрическое описание множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

47) $\operatorname{Re} z > 0$.
48) $\operatorname{Im} z \leqslant 1$.
49) $|\operatorname{Re} z| < 1$.
50) $|\operatorname{Im} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1$.
51) $|z| \leqslant 1$.
52) $|z - i| > 1$.
53) $0 < |z + i| < 2$.
54) $1 < |z - 1| < 3$.
55) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$.
56) $|\pi - \arg z| < \dfrac{\pi}{4}$.

Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:

57) $\operatorname{Im} z^2 = 2$.
58) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$.
59) $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$.
60) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = 1$.
61) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.
62) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.

Найти все значения корней:

63) $\sqrt[3]{1}$.
64) $\sqrt[3]{i}$.
65) $\sqrt[4]{-i}$.
66) $\sqrt[4]{-4}$.
67) $\sqrt[6]{-27}$.
68) $\sqrt[3]{2 - 2i}$.
69) $\sqrt{1 + i}$.
70) $\sqrt{3 - 4i}$.
71) $\sqrt{-3 - 4i}$.
72) $\sqrt{2 + i2\sqrt{3}}$.

Вычислить:

73) $(1 + i)^8(1 - i\sqrt{3})^6$.

74) $(1-i)^7(1+i\sqrt{3})^3$.

75) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$.

76) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{20}$.

Найти решения следующих уравнений:

77) $z^2 = i$.

78) $z^2 = 3-4i$.

79) $z^3 = -1$.

80) $z^6 = 64$.

81) $z^7 + 1 = 0$.

82) $z^8 = 1 + i$.

83) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

84) $z^3 + 6z^2 + 12z + 10 - 2i = 0$.

85) $z^2 - (2+3i)z + 6i = 0$.

86) $z^2 + (3-4i)z - 12i = 0$.

87) $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$.

§2. Последовательности и ряды комплексных чисел

2.1. Последовательности комплексных чисел

Пусть $\{z_n\}$ последовательность комплексных чисел.

Число $A = a + ib$ называется пределом последовательности $\{z_n\}$ и обозначается

$$A = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n - A| < \varepsilon$.

Пусть

$$z_n = x_n + iy_n,\ \xi_n = \eta_n + i\zeta_n,\ A = a + ib,\ B = c + id.$$

Справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$;

2) пусть $z_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, тогда

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |A|$, б) если $A \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} A$, что следует понимать так: можно выбрать значения $\operatorname{Arg} z_n$, которые будут иметь предел, равный одному из значений $\operatorname{Arg} A$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = B \neq \infty$

а) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n + \xi_n = A + B$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \xi_n = AB$;

4) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = B \neq 0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{\xi_n} = \dfrac{A}{B}$.

Последовательность z_n называется сходящейся к ∞, пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

если для любого > 0 существует $N(M) > 0$ такое, что для любого $n > N(M)$ выполняется неравенство $|z_n| > M$.

Справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{z} - 1)n$, если

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где k целое фиксированное число.

Решение: Вычислим пределы действительной и мнимой частей числа $(\sqrt[n]{z}-1)n$:

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}(\sqrt[n]{z}-1)n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-1\right)n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-1\right)n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{r}-1}{\dfrac{1}{n}}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-\frac{1-\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}}{\dfrac{1}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{r}-1}{\dfrac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}}{\dfrac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln r}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln r.$$

Здесь использованы следующие соотношения эквивалентности (при $\alpha\to 0$)

$$\sin\alpha\sim\alpha,\ 1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2},\ e^{\alpha}-1\sim\alpha.$$

Вычислим теперь предел мнимой части

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Im}(\sqrt[n]{z}-1)n=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}}{\frac{1}{n}}=\varphi+2\pi k.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{z}-1)n=\ln r+i(\varphi+2\pi k).$$

2.2. Ряды комплексных чисел

Бесконечный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}z_n,\qquad S=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

Этот предел называется суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n=S.$$

Справедливы следующие свойства:

1. Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n = x_n + iy_n$ сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды составленные отдельно из действительных и мнимых частей этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$.

Решение: Докажем, что не выполняется необходимый признак сходимости рядов. Для чего покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$.

$$\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\right| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right|^n.$$

Найдём значение

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i,$$

поэтому

$$\left|\frac{1+i}{1-i}\right|^n = |i|^n = 1,$$

отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \neq 0.$$

Необходимый признак сходимости рядов не выполнен, поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$$

расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+i+ni)}{n(n+1)}.$$

Решение: Сходимость ряда из комплексных чисел эквивалентна одновременной сходимости рядов из действительных и мнимых частей. Поэтому рассмотрим отдельно два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Оба ряда удовлетворяют признаку Лейбница и поэтому сходятся, а значит сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+i+ni)}{n(n+1)}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}+i}.$$

Решение: Преобразуем выражение

$$\frac{1}{n^{3/4}+i} = \frac{n^{3/4}-i}{(n^{3/4}+i)(n^{3/4}-i)} = \frac{n^{3/4}-i}{n^{3/2}+1}.$$

Сходимость ряда из комплексных чисел эквивалентна одновременной сходимости рядов из действительных и мнимых частей. Поэтому рассмотрим отдельно два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2}+1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+1}.$$

Так как $\frac{3}{2} > 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+1}$$

сходится.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2}+1}$$

и сравним его с расходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2}+1} n^{3/4} = 1,$$

то по второму признаку сравнения ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2}+1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$$

сходятся и расходятся одновременно.

Ряд из действительных частей расходится, а значит расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}+i}$.

2.3. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Абсолютно сходящийся ряд сходится.

При исследовании рядов на абсолютную сходимость мы будем пользоваться известными признаками сходимости знакопостоянных рядов, в частности, признаками сравнения, признаком Даламбера и признаком Коши.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(in)^n}{3^n n!}.$$

Решение: Исследуем ряд на абсолютную сходимость, т.е. исследуем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(in)^n}{3^n n!}\right|.$$

Так как

$$\left|\frac{(in)^n}{3^n n!}\right| = \frac{|(in)^n|}{3^n n!} = \frac{|in|^n}{3^n n!} = \frac{n^n}{3^n n!},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(in)^n}{3^n n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

Пусть $a_n = \dfrac{n^n}{3^n n!}$. Для доказательства сходимости последнего ряда воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^(n+1)(n+1)!} \frac{3^n n!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{3} = \frac{e}{3} < 1.$$

Откуда следует, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(in)^n}{3^n n!}\right|$, а значит сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(in)^n}{3^n n!}$.

Замечание. Из сходимости рядов не следует абсолютная сходимость.

Пример 6. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1+i+ni)}{n(n+1)}.$$

Решение: Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(1+i+ni)}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(n+1)^2)^{\frac{1}{2}}}{n(n+1)}.$$

Для доказательства расходимости последнего воспользуемся первым признаком сравнения

$$\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n(n+1)} < \frac{(1+(n+1)^2)^{\frac{1}{2}}}{n(n+1)}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(n+1)^2)^{\frac{1}{2}}}{n(n+1)}.$$

Из расходимости последнего ряда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1+i+ni)}{n(n+1)}$ абсолютно не сходится. Однако, как видно из примера 3, он сходится условно.

Задачи для самостоятельного решения

Исходя из определения предела последовательности, доказать:

88) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n} + i\dfrac{n-1}{n} \right) = 1+i.$

89) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+ni}{1-ni} \right) = -1.$

90) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+i}{2} \right)^n = 0.$

Вычислить пределы:

91) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1} + i\dfrac{n}{n+1} \right).$

92) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+i)^2}{2n^2 i}.$

93) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n} \right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{n} \right).$

94) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}},\ |z|<1.$

95) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|z|>1$.

Выяснить, при каких z существуют пределы:

96) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$.

97) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n}$.

98) $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n$.

99) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{1+z^n}$.

Доказать равенство:

100) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$, где $z = x+iy$. Указание. Найти пределы последовательностей модулей и аргументов.

Доказать, что:

101) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$.

Исследовать сходимость следующих рядов:

102) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{in+1}{n+2i}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

103) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2i}{n}\right)^n$.

104) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{(n+i)^2}$.

105) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{n}$.

106) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2} \cdot \dfrac{(1+i)^n}{8^n+(1+i)^n}$.

107) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}(1-i)^n$.

108) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+i)\ln^2 n}$.

109) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+i}$.

110) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{i^n}{\ln n}$.

111) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+2i)^n}{2^n n}$.

112) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n n}{2^n}$.

113) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{7n+3}\right)^n\cdot(3+4i)^n$.

114) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$.

115) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin in}{3^n}$.

116) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$.

117) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh} i\sqrt{n}}{\sin in}$.

118) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(-1)}{\operatorname{sh} in}$.

119) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2+i^n)^n}{2^n}$.

Доказать абсолютную сходимость следующих рядов:

120) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3z^n,\ |z|<1$.

121) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n,\ |z|<e$.

122) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2}\cdot\dfrac{z^n}{1+z^n},\ |z|\leqslant\dfrac{1}{4}$.

123) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+4i)\ln^2 n}$.

§3. Функции комплексного переменного

Если каждой точке $z=x+iy$ некоторого множества E поставленно в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w=u+iv$, то говорят, что на множестве E определена функция (однозначная или многозначная) комплексного переменного $w=f(z)$.

Функцию $f(z)$ можно рассматривать как пару функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy),\ v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy).$$

Введём некоторые элементарные функции комплексного переменного.

3.1. Показательная функция

Показательную функцию комплексного переменного

$$w=e^z$$

определим равенством

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Справедлива следующая формула Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Используя тождество Эйлера, получаем показательную форму для представления любого комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в виде:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Функция $w = e^z$ определена на всей комплексной плоскости и на действительной оси совпадает с соответствующей функцией действительного переменного.

Укажем некоторые свойства показательной функции:

1) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
2) $e^z \neq 0$, так как $|e^z| = e^x > 0$;
3) e^z периодическая с периодом $T = 2\pi i$, т.е. $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Пример 1. Записать в показательной форме число $z = \sqrt{3} + i$.

Решение: Представим число в тригонометрической форме

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2,\ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

и

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)\right) = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}.$$

Пример 2. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = e^{3+5i}$.

Решение: Представим число z в тригонометрической форме

$$z = e^{3+5i} = e^3(\cos 5 + i\sin 5).$$

Отсюда видно, что

$$|z| = e^3,\ \arg z = 5.$$

Пример 3. Решить уравнение $e^z - i = 0$.

Решение: Запишем число i в показательной форме

$$i = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}.$$

Перепишем уравнение $e^z - i = 0$ в виде

$$e^z = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)},\ \text{поэтому}\ z = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

3.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция

$$w = \operatorname{Ln} z,$$

где $z \neq 0$, определяется как функция обратная к показательной функции $z = e^w$, причём

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + i2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Эта функция является многозначной. Её значение при $k = 0$ называется главным значением или главной ветвью логарифма и обозначается $\ln|z|$, т.е.

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \text{ и } \operatorname{Ln} z = \ln z + i2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Справедливы следующие свойства логарифмической функции:

1) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$,
2) $\operatorname{Ln} \dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$.

Пример 4. Вычислить $\operatorname{Ln}(5 + 3i)$.
Решение: Найдём модуль и аргумент числа $z = 5 + 3i$.

$$|z| = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}, \qquad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}.$$

Из представления функции $\operatorname{Ln} z$ имеем:

$$\operatorname{Ln}(5+3i) = \ln\sqrt{34} + i\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. Показать, что $\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z \neq 0$.
Решение:

$$\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}\frac{z}{z} = \operatorname{Ln} 1.$$

Найдём модуль и аргумент $z = 1$, а именно:

$$|z| = 1,\ \ \operatorname{Arg} z = 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

откуда получим равенство

$$\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z = \ln 1 + i2k\pi = i2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

3.3. Общая степенная функция

Общая степенная функция
$$w = z^a,$$
где $a = \alpha + i\beta$ -любое комплексное число, определяется равенством
$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$
Это многозначная функция, главное значение которой равно $z^a = e^{a \ln z}$.

Заметим, что степень с произвольным показателем, вообще говоря, не подлежит правилу сложения показателей при умножении степеней, а также правилу умножения показателей при возведении степени в степень. Так
$$z^{a_1} z^{a_2} = e^{a_1 \operatorname{Ln} z} e^{a_2 \operatorname{Ln} z} = e^{a_1 \operatorname{Ln} z + a_2 \operatorname{Ln} z} \neq e^{(a_1+a_2) \operatorname{Ln} z} = z^{a_1+a_2}$$
и
$$(z^{a_1})^{a_2} = (e^{a_1 \operatorname{Ln} z})^{a_2} = e^{a_2(a_1(\operatorname{Ln} z + i2k\pi))} \neq e^{a_2 a_1 \operatorname{Ln} z}.$$

Пример 6. Найти образ линии а) $x = 1$, б) $|z| = 2$, в) $\arg z = \frac{\pi}{6}$ при отображении $w = z^2$.

Решение: а) Для решения задачи запишем w в декартовых координатах:
$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy, \ \operatorname{Re} w = u = x^2 - y^2, \ \operatorname{Im} w = v = 2xy.$$
Пусть $x = 1$. Тогда $u = 1 - y^2$ и $v = 2y$. Исключая y из этих уравнений, будем иметь $u = 1 - \frac{v^2}{4}$. Таким образом, образ прямой $x = 1$ есть парабола $u = 1 - \frac{v^2}{4}$.

б) Пусть $|z| = 2$. Тогда $|w| = |z|^2 = 4$ и $\operatorname{Arg} w = 2 \operatorname{Arg} z$. Отсюда следует, что образом левой полуокружности $|z| = 2$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ служит окружность $|w| = 4$, $-\pi < \arg w \leqslant \pi$.

Образом правой полуокружности $|z| = 2$, $-\pi < \arg z \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \pi$ служит та же самая окружность $|w| = 4$, $-\pi < \arg w \leqslant \pi$.

Получили, что образом окружности $|z| = 2$ служит окружность$|w| = 4$, которая пробегается два раза.

в) Пусть $\arg z = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\operatorname{Arg} w = 2 \arg z + 2\pi k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

При изменении $|z|$ от 0 до $+\infty$, $|w|$ меняется от 0 до $+\infty$ и луч $\arg z = \frac{\pi}{6}$ переходит в луч $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

3.4. Общая показательная функция

Общая показательная функция
$$w = a^z,$$

где $a = \alpha + i\beta \neq 0$ -любое комплексное число, определяется равенством

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Это многозначная функция, главное значение которой равно $a^z = e^{z \ln a}$.

Пример 7. Найти значение степени $(1 - i\sqrt{3})^i$.

Решение: Представим $(1 - i\sqrt{3})^i$ согласно определению показательной функции в виде

$$(1 - i\sqrt{3})^i = e^{i \operatorname{Ln}(1 - i\sqrt{3})}.$$

Найдём значение

$$\operatorname{Ln}(1 - i\sqrt{3}).$$

Для чего найдём модуль и аргумент комплексного числа $1 - i\sqrt{3}$, получим:

$$|1 - i\sqrt{3}| = 2, \ \arg(1 - i\sqrt{3}) = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3},$$

отсюда имеем

$$\operatorname{Ln}(1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k).$$

Используя последнее выражение, найдём:

$$(1 - i\sqrt{3})^i = e^{i \operatorname{Ln}(1 - i\sqrt{3})} = e^{i(\ln 2 + i(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k))} =$$
$$= e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k} e^{i \ln 2} = e^{\frac{\pi}{3} - 2\pi k} (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2), \ k \in \mathbb{Z}.$$

3.5. Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ определим через показательную функцию по формулам Эйлера

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ и } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Укажем некоторые свойства тригонометрических функций:

1) При $z = x$, $\sin z$ и $\cos z$ совпадают с тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительной переменной x.
2) Выполняются основные тригонометрические соотношения.
3) $\sin z$ и $\cos z$ периодические функции с основным периодом 2π.
4) $\sin z$-нечётная функция, $\cos z$-чётная функция.
5) Могут принимать любые значения, а не только ограниченные по модулю единицей.

Определим функции гиперболический синус $\operatorname{sh} z$ и гиперболический косинус $\operatorname{ch} z$ формулами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ и } \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Связь гиперболических функций с тригонометрическими выражается равенствами

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \ \operatorname{ch} z = \cos iz,$$
$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \ \cos z = \operatorname{ch} iz.$$

Пример 8. Найти действительную и мнимую часть комплексного числа $\cos(1+i)$.

Решение:

Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

тогда

$$\cos(1+i) = \cos 1 \cos i - \sin 1 \sin i.$$

Запишем $\cos i$ и $\sin i$ через гиперболические функции

$$\cos i = \operatorname{ch} 1 \text{ и } \sin i = i \operatorname{sh} 1.$$

Окончательно получаем

$$\cos(1+i) = \cos 1 \operatorname{ch} 1 - i \sin 1 \operatorname{sh} 1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \cos(1+i) = \cos 1 \operatorname{ch} 1, \ \operatorname{Im} \cos(1+i) = -\sin 1 \operatorname{sh} 1.$$

Пример 9. Доказать равенство $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

Решение: Для доказательства равенства воспользуемся формулой Эйлера

$$\sin 2z = \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} =$$
$$= 2\frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}\frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} = 2 \sin z \cos z.$$

Здесь была использована формула

$$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2).$$

Пример 10. Найти точки, в которых обращается в нуль функция $\operatorname{sh} z$.

Решение: Представим функцию $\operatorname{sh} z$ через показательную функцию:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0.$$

Отсюда получим равенство

$$e^z - e^{-z} = 0, \ e^z = e^{-z}, \ e^{2z} = 1.$$

Положим

$$z = x + iy \text{ и } e^{2z} = e^{2x+i2y} = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y).$$

Представим число 1 в тригонометрической форме

$$1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

поэтому $e^{2x} = 1,\ 2y = 2\pi k$ или $x = 0,\ y = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Окончательно получим, что точки, в которых обращается в нуль функция $\operatorname{sh} z$, можно представить в виде $z = i\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.6. Обратные тригонометрические функции

Функции $w = \operatorname{Arcsin} z, w = \operatorname{Arccos} z, w = \operatorname{Arctg} z, w = \operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции обратные к тригонометрическим функциям $z = \sin w, z = \cos w, z = \operatorname{tg} w, z = \operatorname{ctg} w$ соответственно. Все они являются многозначными и выражаются через логарифмическую функцию:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}),$$
$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$
$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$
$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}.$$

Пример 11. Решить уравнение $\sin z = 5$.

Решение: Если $\sin z = 5$, то $z = \operatorname{Arcsin} 5$. Воспользуемся соответствующей формулой

$$z = \operatorname{Arcsin} 5 = -i\operatorname{Ln}(i5 + \sqrt{1-5^2}) = -i\operatorname{Ln}(i5 + \sqrt{-24}).$$

Получим две серии корней

$$z = -i\operatorname{Ln}(i5 + i2\sqrt{6}) \text{ и } z = -i\operatorname{Ln}(i5 - i2\sqrt{6}).$$

Так как

$$|(5+2\sqrt{6})i| = 5 + 2\sqrt{6}, \qquad |(5-2\sqrt{6})i| = 5 - 2\sqrt{6}$$

и

$$\arg(5+2\sqrt{6})i = \arg(5-2\sqrt{6})i = \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\operatorname{Ln}(5+2\sqrt{6})i = \ln(5+2\sqrt{6}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

и

$$\operatorname{Ln}(5-2\sqrt{6})i = \ln(5-2\sqrt{6}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi).$$

Следовательно,

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(5 + 2\sqrt{6}),$$
$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(5 - 2\sqrt{6}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Записать в показательной форме числа:

124) 1) $z = -1,$ 2) $z = i,$ 3) $z = 1 - i,$ 4) $z = \sqrt{3} - i.$

Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел:

125) 1) $e^{3+2i},$ 2) $e^{1-3i},$ 3) $e^{2+5i},$ 4) $e^{3-7i},$ 5) $e^{i\varphi},\ |\varphi| < \pi,$ 6) $e^{-i\varphi},\ |\varphi| < \pi.$

Вычислить значения e^z в точках:

126) 1) $z = 2\pi i,$ 2) $z = \pi i,$ 3) $z = \dfrac{\pi i}{2},$ 4) $z = -\dfrac{\pi i}{2},$ 5) $z = \dfrac{\pi i}{4}.$

Доказать, что:

127) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}.$

128) $e^{z+2\pi i} = e^z.$

Доказать равенства:

129) $\cos(-z) = \cos z.$

130) $\sin(-z) = -\sin z.$

131) $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z.$

132) $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z.$

133) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$

134) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$

135) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$

136) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$

137) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$

Пусть $z = x + iy$. Доказать, что:

138) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y,\ \operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y.$

139) $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y,\ \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y.$

140) $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y,\ \operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y.$

141) $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y,\ \operatorname{Im}\operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \sin y.$

Найти действительные и мнимые части следующих чисел:

142) 1) $z = \cos(2 + i),$ 2) $z = \sin 2i,$ 3) $z = \operatorname{sh}(-2 + i),$ 4) $z = \operatorname{ch} i,$ 5) $z = \operatorname{tg}(2 - i).$

Найти множество точек, в которых следующие функции принимают действительные значения:

143) 1) $e^z,$ 2) $\cos z,$ 3) $\sin z.$

Найти множество точек, в которых следующие функции принимают чисто мнимые значения:

144) 1) e^z, 2) $\sin z$, 3) $\operatorname{ch} z$.

Вычислить:

145) 1) $\operatorname{Ln} e$, 2) $\operatorname{Ln}(-1)$, 3) $\operatorname{Ln} i$, 4) $\operatorname{Ln}(3-4i)$, 5) $\operatorname{Ln}(-4+3i)$ 6) $\operatorname{Ln} \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, 7) $\operatorname{Ln} \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Найти значения степеней:

146) 1) $i^{\sqrt{2}}$, 2) i^i, 3) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$, 4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}$, 5) $(3-4i)^{1+i}$, 6) $(1-i\sqrt{3})^i$.

Вычислить:

147) 1) $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 2) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 3) $\operatorname{Arccos}(2)$, 4) $\operatorname{Arcsin} i$, 5) $\operatorname{Arctg}(1+2i)$.

Найти решения следующих уравнений:

148) $\ln(z+i) = 0$.

149) $\ln(i-z) = 1$.

150) $e^{-z} + 1 = 0$.

151) $e^z + i = 0$.

152) $\sin z = \dfrac{4i}{3}$.

153) $\sin z = \dfrac{5}{3}$.

154) $\cos z = \dfrac{3i}{4}$.

155) $\cos z = \dfrac{3+i}{4}$.

156) $\operatorname{tg} z = \dfrac{5i}{3}$.

157) $\operatorname{ctg} z = -\dfrac{3i}{5}$.

Найти прообразы следующих линий при отображении $w = z^2$, $w = u + iv$:

158) 1) $u = 3$, 2) $v = 5$.

Найти образы следующих линий при отображении $w = \dfrac{1}{z}$:

159) 1) $x = 3$, 2) $y = 5$, 3) $|z| = R$, 4) $y = x$, 5) $(x-2)^2+y^2 = 1$, 6) $\arg z = \alpha$, 7) $|z-1| = 1$.

§4. Дифференцирование комплексных функций

4.1. Производная функции

Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется дифференцируемой в этой точке, если существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0),$$

называемый производной функции $f(z)$ в точке z_0.

Справедливы следующие свойства:

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы, а C произвольная постоянная, тогда

1) $C'=0$.
2) $(Cf(z))'=Cf'(z)$.
3) $(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z)$.
4) $(f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.
5) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z)\neq 0$.
6) Производная сложной функции. Если функция $w=f(z)$ имеет производную в точке z_0, а функция $\xi=\varphi(w)$, определенная на множестве значений функции $f(z)$, имеет производную в точке w_0, $w_0=f(z_0)$, то сложная функция $\xi=\varphi(f(z))$ имеет производную в точке z_0 и справедливо равенство:

$$(\varphi(f(z_0)))'=\varphi'(w_0)f'(z_0).$$

7) Производная обратной функции. Если функция $w=f(z)$ имеет производную в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, а обратная к $f(z)$ функция $z=\varphi(w)$ существует и непрерывна, то она имеет производную в точке w_0, $w_0=f(z_0)$ и справедливо равенство

$$\varphi'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

Таблица производных

1.$(z^n)' = nz^{n-1}$.	2.$(e^z)' = e^z$.
3.$(\sin z)' = \cos z$.	4.$(\cos z)' = -\sin z$.
5.$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$.	6.$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$.
7.$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.	8.$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.
9.$(\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$.	10.$(\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$.
11.$(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.	12.$(\operatorname{Arccos} z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.
13.$(\operatorname{Arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$.	14.$(\operatorname{Arcctg} z)' = -\frac{1}{1+z^2}$.
15.$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$.	

Заметим, что при дифференцировании рассматриваются только однозначные функции. В равенствах (11)–(15) понимаем левую часть как производную от произвольной однозначной ветви соответствующей функции, выделенной в окрестности данной точки.

Пример 1. Найти где дифференцируема функция $f(z) = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ и найти её производную.

Решение: Функция $f(z)$ определена везде кроме точек, где

$$e^z - 1 = 0,\ e^z = 1.$$

Положим

$$z = x + iy,\ e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Представим число 1 в тригонометрической форме

$$1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

поэтому $e^x = 1,\ y = 2\pi k$ или $x = 0,\ y = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Окончательно получим $z = i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, функция $f(z)$ определена всюду кроме точек $z = i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

По правилу дифференцирования частного двух функций получим

$$f'(z) = \frac{(e^z+1)'(e^z-1) - (e^z+1)(e^z-1)'}{(e^z-1)^2} =$$
$$= \frac{e^z(e^z-1) - e^z(e^z+1)}{(e^z-1)^2} = \frac{-2e^z}{(e^z-1)^2}.$$

Из последнего равенства видно, что функция является дифференцируемой во всех точках, где она определена.

4.2. Условия Коши–Римана

Пусть $z = x + iy$ и функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда

1) $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции двух переменных в точке (x_0, y_0);
2) выполняются условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пример 2. Доказать, что функция $f(z) = z^2 \operatorname{Im} z$ имеет производную только в одной точке $z = 0$.

Решение: Проверим выполнение условий Коши–Римана для функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = z^2 \operatorname{Im} z = (x^2 - y^2)y + 2ixy^2,$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 3y^2,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 4xy.$$

Откуда видно, что условия Коши–Римана не выполняются ни в одной точке, кроме точки $z = 0$. Так как условия Коши–Римана являются лишь необходимыми условиями существования производной, то вычислим $f'(0)$ по определению

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\Delta z)(\Delta y) = 0.$$

Таким образом, функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z = 0$.

Иногда функцию $f(z) = u + iv$ удобно рассматривать как функцию переменных r и φ, где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Запишем условия Коши–Римана в полярных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Пример 3. Проверить условия Коши–Римана для функции $f(z) = z^n$.

Решение: Запишем $f(z) = u + iv$ в полярных координатах

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \; u(r, \varphi) = r^n \cos n\varphi, \; v(r, \varphi) = r^n \sin n\varphi$$

и вычислим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -nr^{n}\sin n\varphi,$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1}\sin n\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^{n}\cos n\varphi.$$

Условия Коши–Римана в полярных координатах выполнены.

4.3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть $w = f(z)$ имеет производную в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Пусть C кривая, проходящая через точку z_0. Через Γ обозначим образ кривой C при отображении $w = f(z)$, проходящей через точку $w_0 = f(z_0)$.

Пусть φ угол, образуемый касательной к кривой C в точке z_0 и положительным направлением действительной оси в плоскости z, а θ угол, образуемый касательной к кривой Γ в точке $w_0 = f(z_0)$ с положительным направлением действительной оси в плоскости w (касательные считаются направленными в ту же сторону, что и кривые). Справедливо равенство

$$\theta = \varphi + \arg f'(z_0).$$

Пусть z произвольная точка кривой C. Обозначим

$$\Delta z = z - z_0,\ \Delta w = w - w_0.$$

Коэффициентом линейного растяжения кривой C в точке z_0 называется предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Модуль производной $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту линейного растяжения кривой C в точке z_0.

Пример 4. Указать, какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при отображении $w = z^2 + z$.

Решение: Найдём производную данного отображения $w' = 2z + 1 = 2x + 1 + i2y$ и вычислим её модуль

$$|w'| = \sqrt{(2x+1)^2 + 4y^2}.$$

Так как модуль производной является коэффициентом линейного растяжения, то область, где $|w'| < 1$, сжимается, а область, где $|w'| > 1$, растягивается.

Следовательно, окружность $(2x + 1)^2 + 4y^2 = 1$ делит плоскость z на две части. Внутренняя её часть $(2x + 1)^2 + 4y^2 < 1$ при отображении w сжимается, а внешняя часть $(2x + 1)^2 + 4y^2 > 1$ растягивается.

4.4. Аналитические функции

Функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в этой точке и в некоторой её окрестности.

Из определения следует, что функция, аналитическая в точке z_0, будет аналитической в каждой точке некоторой окрестности точки z_0. Поэтому множество точек аналитичности всегда открыто.

Множество точек G комплексной плоскости называется областью, если:

1) оно открыто, т.е. вместе с каждой точкой, принадлежащей этому множеству оно содержит и некоторую окрестность этой точки;
2) оно связно, т.е. вместе с каждой парой точек, принадлежащих этому множеству, оно содержит и некоторую ломаную, соединяющую эти точки.

Точка z_0 назывется граничной точкой области G, если в любой её окрестности содержатся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие области G. Множество всех граничных точек области G образуют границу области.

Область G вместе с её границей называется замкнутой областью и обозначается $\bar{G}$.

Функция называется аналитической в области G , если она аналитическая в каждой точке этой области.

Функция называется аналитической в области $\bar{G}$, если она аналитическая в некоторой области D ($\bar{G} \subset D$).

Функция называется аналитической на кривой γ , если она аналитическая в некоторой области, содержащей эту кривую.

Функция $f(z)$ называется аналитической на бесконечности, если функция $\varphi(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ аналитическая в точке $z = 0$.

Пример 5. Проверить является ли функция $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$

1) аналитической в точке $z = 0$;
2) дифференцируемой в точке $z = 0$.

Решение: Для функции

$$f(z) = u + iv = z\,\mathrm{Re}\,z = (x+iy)x = x^2 + ixy,\ u = x^2,\ v = xy.$$

Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Отсюда видно, что условия Коши–Римана выполняются только в одной точке $z = 0$. Поэтому, функция не является аналитической в точке $z = 0$. Вычислим производную $f'(0)$. По определению

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \Delta x}{\Delta z} = 0.$$

Таким образом, функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z = 0$, но не является аналитической.

Пример 6. Показать, что функция $f(z) = z^2 + 3e^z$ аналитическая в области $G = \{z\ : |z| < 1\}$.

Решение: Используя свойство производной суммы и известные производные функций $(z^2)' = 2z$, $(3e^z)' = 3e^z$, найдем производную функции $(f(z))' = (z^2+3e^z)' = 2z+3e^z$. Отсюда видно, что для любой точки z, $|z| < 1$ существует конечная производная функции$f(z) = z^2+3e^z$, поэтому она является аналитической в области G.

Пример 7. Найти аналитическую в комплексной плоскости функцию $f(z) = u + iv$ по заданной её действительной части $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$, если $f(i) = -1 + 2i$.

Решение: Из условий Коши–Римана имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2.$$

Поэтому

$$v(x,y) = \int (2x+2)dy = (2x+2)y + c(x).$$

Постоянная интегрирования может зависеть от x, так как интегрирование производилось по y. Найдём $c(x)$, для чего используем второе из условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + c'(x).$$

Следовательно,

$$2y + c'(x) = 2y,\ c'(x) = 0, c(x) = c_0,\ v(x,y) = (2x+2)y + c_0$$

и

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + c_0).$$

Определим c_0 из условия $f(i) = -1 + 2i$, получим:

$$-1 + i(2 + c_0) = 2i - 1, c_0 = 0.$$

Итак,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y) = (x^2 - y^2 + i2xy) + 2(x + iy) = z^2 + z.$$

Ответ: $f(z) = z^2 + z$.

Задачи для самостоятельного решения

Пусть $z = x + iy$. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

160) 1) $\operatorname{Re} z$, 2) x^2y^2, 3) $|z|^2$, 4) $x^2 + iy^2$, 5) $z \operatorname{Re} z$, 6) $2xy - i(x^2 - y^2)$.

Используя производную показательной функции, доказать:

161) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

162) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

163) $(\sin z)' = \cos z$.

164) $(\cos z)' = -\sin z$.

165) $(\operatorname{Ln} z)' = \dfrac{1}{z}$.

Найти, где дифференцируемы следующие функции, и найти их производные:

166) $e^{\operatorname{ch} z}$.

167) $\sin(2e^z)$.

168) $\sin z \operatorname{ch} z - i \cos z \operatorname{sh} z$.

169) ze^{-z}.

170) $\dfrac{e^z}{z}$.

171) $\dfrac{z \cos z}{1 + z^2}$.

172) $\operatorname{tg} z$.

173) $\operatorname{ctg} z$.

174) $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

175) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$.

176) $(e^z-e^{-z})^2$.

177) $\dfrac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

Проверить выполнение условий Коши–Римана для функций:

178) 1) z^n, 2) e^z, 3) $\cos z$, 4) $\operatorname{Ln} z$.

Найти все точки, в которых коэффициент линейного растяжения равен единице:

179) 1) $w=z^2-2z$, 2) $w=\dfrac{1}{z}$, 3) $w=z^3$, 4) $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

Найти все точки, в которых угол поворота равен нулю:

180) 1) $w=iz^2$, 2) $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$, 3) $w=-z^3$, 4) $w=z^2-2z$, 5) $w=\dfrac{i}{z}$.

Определить какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается:

181) 1) $w=z^2$, 2) $w=e^z$, 3) $w=\ln(z-1)$.

Пусть кривая C -луч $\arg(z-z_0)=\varphi$, выходящая из точки z_0. Найти коэффициент линейного растяжения и угол поворота в точке z_0 для этого луча при следующих отображениях:

182) 1) $w=z^2,\ z_0=1$, 2) $w=w=\bar{z}^2,\ z_0=i$, 3) $w=ie^{2z},\ z_0=0$, 4) $w=2z+i\bar{z},\ z_0=0$, 5) $w=\dfrac{1-iz}{1+iz},\ z_0=-i$.

Найти аналитическую функцию в окрестности точки z_0, если известны ее действительная $u(x,y)$ или мнимая $v(x,y)$ часть и значение $f(z_0)$:

183) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2},\ f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$.

184) $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ f(1)=0$.

185) $u=3x^2-4xy-3y^2,\ f(i)=-3-2i$.

186) $v=2y(5x-3),\ f\left(\dfrac{1}{5}\right)=-1$.

187) $v=\sin y\operatorname{ch}(x+1),\ f\left(-1+\dfrac{\pi}{2}i\right)=i$.

188) $u=\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2},\ f(i)=i$.

Выяснить, является ли данная функция действительной или мнимой частью аналитической функции:

189) 1)$u(x,y)=e^{y/x}$, 2)$v(x,y)=e^{-x}\sin 2y$.

§5. Интегрирование функций комплексного переменного

5.1. Интеграл по комплексному переменному и его свойства

Пусть $f(z)$ однозначная и непрерывная в области G функция комплексного переменного z. Γ – произвольная кусочно-гладкая кривая,лежащая в области G, с началом в точке a и концом в точке b. Разобьём дугу ab линии Γ на произвольное число n частичных дуг с помощью точек $a = z_0, z_1, ..., z_n = b$, расположенных последовательно в положительном направлении линии Γ. Составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k, \text{ где } \Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

Точка ξ_k лежит на частичной дуге Γ, соединяющей точки z_k, z_{k+1}. Предел этих интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения (если он не зависит от разбиения) называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой Γ и обозначается

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz.$$

Основные свойства интеграла по комплексному переменному:

1) $\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = -\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$, где Γ^+, Γ^- обозначают один и тот же путь, проходимый в противоположных направлениях.
2) $\int\limits_{\Gamma} Cf(z)dz = C\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, - произвольная постоянная.
3) $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz$, если путь интегрирования описывается движущейся точкой, проходящей последовательно его части Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n.
4) $\int\limits_{\Gamma} f_1(z) + f_2(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f_1(z)dz + \int\limits_{\Gamma} f_2(z)dz.$

Пусть

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Вычисление интеграла по комплексному переменному сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов второго рода от действительной функции, а именно:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Эту формулу легко запомнить, если написать в таком виде:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (u+iv)(dx+idy).$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_\Gamma (2z+\bar{z}+i)dz,$$

где Γ – дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z = 0$ и $z = 1+i$.

Решение:

$$\int_\Gamma (2z+\bar{z}+i)dz = \int_\Gamma 3xdx - (y+1)dy + i\int_\Gamma (y+1)dx + 3xdy =$$

$$= \int_0^1 (3x - 2(x^2+1)x)dx + i\int_0^1 (x^2+1+6x^2)dx =$$

$$= \int_0^1 (x-2x^3)dx + i\int_0^1 (7x^2+1)dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right)\right]_0^1 + i\left[\left(\frac{7}{3}x^3 + x\right)\right]_0^1 = \frac{10}{3}i.$$

Часто вычисление интеграла по комплексному переменному сводится к вычислению обыкновенного определённого интеграла. Пусть уравнение линии Γ задано в виде

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b],$$

где $x(t),\ y(t)$ две непрерывно-дифференцируемые функции действительного переменного t такие, что двум различным значениям параметра t (за исключением, быть может, $t = a$ и $t = b$) соответствуют две различные точки комплексной плоскости. Имеем

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt =$$

$$= \int_a^b u(x(t),y(t))x'(t)dt - v(x(t),y(t))y'(t)dt +$$

$$+ i\int_a^b v(x(t),y(t))x'(t)dt + u(x(t),y(t))y'(t)dt.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{(\sqrt{z})_1} dz,$$

где Γ – правая полуокружность $|z| = 2$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, пробегаемая от точки $z = -2i$ до точки $z = 2i$. Через $(\sqrt{z})_1$ обозначена одна из непрерывных ветвей двузначной функции $\sqrt{z}$.

Решение: Запишем дугу Γ в параметрическом виде как $z = 2e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Получим

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{(\sqrt{z})_1} dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2ie^{it}dt}{\sqrt{2}e^{i\frac{t}{2}}} = \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} ie^{i\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \left[2\sqrt{2}e^{i\frac{t}{2}}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 4\sqrt{2}i \sin\frac{\pi}{4} = 4i.$$

5.2. Формула Ньютона–Лейбница

Первообразной для функции $f(z)$ в области G называем всякую функцию $F(z)$, удовлетворяющую всюду в области G условию

$$F'(z) = f(z).$$

В дальнейшем будем предполагать, что граница области состоит из конечного числа замкнутых кривых (мы не даём определения этих понятий (см. рисунок)),

где граница состоит из трёх замкнутых кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$.

Если область G ограничена и её граница состоит из одной замкнутой кривой, то она называется односвязной областью.

Пусть область G односвязная и кривая Γ лежит внутри G. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области G.

Справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{A}^{B} f(z)dz = F(B) - F(A),$$

где A и B начало и конец пути интегрирования, $F(z)$ первообразная для функции $f(z)$.

Пример 3. Применяя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (z-1)dz,$$

где кривая Γ соединяет точки $A = 2+i$, $B = -2-i$, как показано на рисунке.

Решение: Функция $f(z) = z - 1$ аналитическая во всей комплексной плоскости, поэтому мы можем применить формулу Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{\Gamma} (z-1)dz = \int\limits_{2+i}^{-2-i} (z-1)dz = \left[\frac{z^2}{2} - z\right]_{2+i}^{-2-i} =$$

$$= \frac{(-2-i)^2}{2} - (-2-i) - \frac{(2+i)^2}{2} + (2+i) = 4 + 2i.$$

Пример 4. Применяя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z}dz,$$

где кривая Г четверть окружности, соединяющая точки $A = 1,\ B = i$, как показано на рисунке.

Решение: Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ аналитическая в односвязной области G .

Однозначная функция $F(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z$ является первообразной для функции $f(z) = \frac{1}{z}$. По формуле Ньютона–Лейбница получим

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int\limits_{1}^{i} \frac{1}{z} dz = \ln(i) - \ln(1) = i\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Если кривая Г соединяет точки $A = 1, B = i$, как показано на рисунке, то в этом случае формулу Ньютона–Лейбница применять

нельзя. Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ не является аналитической в точке $z = 0$, поэтому область G, где рассматривается первообразная функции $f(z)$, не может содержать точку $z = 0$. На рисунке видно, что область, которая содержит кривую Г, но не содержит точку $z = 0$, не может быть односвязной. Это противоречит условиям теоремы Ньютона–Лейбница.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

190) $\int\limits_0^1 (1+it)^2 dt.$

191) $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+it} dt.$

192) $\int\limits_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt.$

193) $\int\limits_0^\pi e^{-it} dt.$

194) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i3t} dt.$

Вычислить интегралы $\int\limits_\Gamma \operatorname{Re} z dz$, $\int\limits_\Gamma \operatorname{Im} z dz$, где:

195) Γ – радиус вектор точки $2+i$.

196) Γ – верхняя полуокружность $|z|=1$ (начало пути в точке $z=1$).

197) Γ – окружность $|z-2|=3$, проходимая против часовой стрелки.

Вычислить интегралы $\int\limits_\Gamma |z| dz$, где:

198) Γ – отрезок $z=(2-i)t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

199) Γ – окружность $|z|=5$, проходимая против часовой стрелки.

200) Γ – левая полуокружность $|z|=1$ (начало пути в точке $z=i$).

Вычислить интегралы:

201) $\int\limits_\Gamma |z|\bar{z} dz$, где Γ – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z|=1$ и отрезка $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1,\ \operatorname{Im} z = 0$.

202) $\int\limits_\Gamma e^{\bar{z}} dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0,\ z_2=1+i$.

203) $\int\limits_\Gamma \frac{1}{z-i} dz$, где Γ – линия, состоящая из правой полуокружности $|z-i|=1$ и отрезка, соединяющего точки $z_1=2i,\ z_2=3i$.

204) $\int\limits_\Gamma \operatorname{Re}(\sin z)\cos z dz$, где Γ – $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1,\ \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4},\ z=\frac{\pi}{4}-i$ – начало пути.

Найти первообразные функций:

205) 1) e^{az}, 2) $\operatorname{ch} az$, 3) $\operatorname{sh} az$, 4) $\cos az$, 5) $\sin az$, 6) ze^{az}, 7) $z^2 \operatorname{ch} az$, 8) $z\cos az$.

Пользуясь формулой Ньютона–Лейбница, вычислить:

206) $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (z^2-z+1) dz.$

207) $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz.$

208) $\int\limits_0^i \dfrac{\ln z}{z}dz$, по отрезку соединяющему точки $z_1 = 1,\ z_2 = i.$

209) $\int\limits_0^{1+i} \sin z \cos z dz.$

§6. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Интегральная теорема Коши. Если G односвязная область и $f(z)$ аналитическая функция в G, то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в области G

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Теорему Коши можно распространить и на случай многосвязной области. Пусть $f(z)$ аналитическая в многосвязной области D. Пусть замкнутая область $\bar{G}$ принадлежит D. Граница G состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ ...,\ \Gamma_n$, каждый из которых положительно ориентирован относительно области G (т.е. при обходе область G остаётся слева). Обозначим через Γ составной контур, состоящий из контуров $\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ ...,\ \Gamma_n$. При этих предположениях справедливо равенство

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz = 0.$$

Интегральная формула Коши. Пусть $f(z)$ аналитическая в области D и область G с границей Γ, состоящей из одной или нескольких кусочно-гладких кривых, ориентированных положительно относительно области G, содержится в D. Тогда для любой точки $z_0 \in G$ справедлива интегральная формула Коши:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

и

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

где $f^{(n)}$ - производная порядка n функции $f(z)$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1} dz$, где кривая Γ

$$1)\Gamma : |z-1| = \tfrac{1}{2};\ \ 2)\Gamma : |z-i| = \tfrac{1}{2};\ \ 3)\Gamma : |z+i| = \tfrac{1}{2};\ \ 4)\Gamma : |z| = 2.$$

Замечание. Здесь и дальше, если не оговорено противное, полагаем, что контур Γ обходится в положительном направлении.

Решение: 1) Так как функция $\frac{1}{z^2+1}$ аналитическая в круге $|z-1| \leqslant \frac{1}{2}$, то применима интегральная теорема Коши, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = 0.$$

2) В круге $|z-i| \leqslant \frac{1}{2}$ функция $\frac{1}{z^2+1}$ имеет особенность в точке $z = i$ и поэтому не является аналитической. Для вычисления интеграла воспользуемся интегральной формулой Коши

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2+1} dz = \int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2+1} dz = \int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i)(z+i)} dz =$$

$$= \int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{1}{z_0+i}\bigg|_{z_0=i} = \pi.$$

В этом случае $z_0 = i,\ f(z) = \frac{1}{z+i}$, контур $\Gamma = \Gamma_1 : |z-i| = \frac{1}{2}$ обходится против часовой стрелки.

3) В круге $|z+i| \leqslant \frac{1}{2}$ функция $\frac{1}{z^2+1}$ имеет особенность в точке $z = -i$ и не является аналитической. Для вычисления интеграла воспользуемся

интегральной формулой Коши

$$\int\limits_{\Gamma_2}\frac{1}{z^2+1}dz=\int\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2+1}dz=\int\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{(z-i)(z+i)}dz=$$

$$=\int\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}dz=2\pi i\frac{1}{z_0-i}\bigg|_{z_0=-i}=-\pi.$$

В этом случае $z_0=-i,\ f(z)=\dfrac{1}{z-i}$ контур $\Gamma=\Gamma_2:|z+i|=\frac{1}{2}$ обходится против часовой стрелки.

4) В круге $|z|\leqslant 2$ функция $\dfrac{1}{z^2+1}$ имеет две особенности в точках $z=i,\ z=-i$. Для вычисления интеграла воспользуемся теоремой Коши для многосвязной области G. В качестве G возьмём область, границей которой служат окружности

$$\Gamma_0:|z|=2;\quad \Gamma_1^-:|z-i|=\frac{1}{2};\quad \Gamma_2^-:|z+i|=\frac{1}{2}.$$

Контур Γ_0 обходится против часовой стрелки, а контуры Γ_1,Γ_2 по часовой стрелке. Функция $\dfrac{1}{z^2+1}$ аналитическая в указанной области. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_0}\frac{1}{z^2+1}dz+\int\limits_{\Gamma_1^-}\frac{1}{z^2+1}dz+\int\limits_{\Gamma_2^-}\frac{1}{z^2+1}dz=0$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_0}\frac{1}{z^2+1}dz=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{1}{z^2+1}dz+\int\limits_{\Gamma_2}\frac{1}{z^2+1}dz$$

или

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}dz = \pi - \pi = 0.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{(1-z)^3}dz,$$

где кривая $\Gamma : |z-1| = \dfrac{1}{2}$.

Решение: Положим $n = 2,\ f(z) = -e^z,\ z_0 = 1$. Применим интегральную формулу Коши.

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{(1-z)^3}dz = \frac{2\pi}{2!}i\frac{d^2}{dz^2}(-e^z)|_{z=1} = -i\pi e.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

210) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{1}{z^2+9}dz.$

211) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{1}{z^2+9}dz.$

212) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{1}{z^2+9}dz.$

213) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4-1}dz.$

214) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{1}{z^2+z+1}dz.$

215) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}dz.$

216) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2} \frac{\cos z}{z^2-4}dz.$

217) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z-\frac{\pi}{4}}dz.$

218) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=\frac{5}{2}} \frac{\sin\dfrac{1}{z}}{z-2}dz.$

219) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos\pi z + 3\sin\pi z}{(z^2-4)(z+i)}dz.$

220) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2e^z}{z^2-1}dz.$

221) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{ch} z^2}{i-z}dz.$

222) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{sh} z}{z^2+1}dz.$

223) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+\pi^2}dz.$

224) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{(1+z)(z-1)^3}dz.$

225) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{(2-z)^2}dz.$

226) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz.$

227) $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz.$

228) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}dz.$

229) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz.$

230) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz.$

231) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

232) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

233) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

§7. Степенные ряды. Разложение функции в степенной ряд

7.1. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots,$$

где c_n и z_0 комплексные числа, а z комплексное переменное.

Если $z_0 = 0$, то получаем ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

Областью сходимости степенного ряда является внутренность круга с центром в точке z_0 и радиусом R с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого круга. Радиус круга называется радиусом сходимости и определяется по формулам

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

и

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

если пределы существуют.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < R$ сходится абсолютно, а при $|z-z_0| > R$ расходится. Множество точек сходимости ряда на окружности $|z-z_0| = R$ может быть пустым, может полностью совпадать с ней, может в одних точках окружности сходиться, а в других расходиться.

Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ есть число $R>0$, то открытый круг $|z-z_0|<R$ называют кругом сходимости этого ряда. Если $R=\infty$ кругом сходимости называют всю комплексную плоскость. Если $R=0$, то ряд сходится только в точке $z=z_0$.

Таким образом, степенной ряд определяет функцию

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-z_0|<R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел , удовлетворяющих условию $|z-z_0|=R$. Функция $S(z)$ является аналитической в круге сходимости.

Пример 1. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n n^3}.$$

Решение: По условию имеем $|c_n|=\dfrac{1}{3^n n^3}$. Для того чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

получим

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)^3}{3^n n^3}=\lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=3.$$

Проверим, будет ли сходиться ряд на окружности $|z-i|=3$. Для чего найдём модуль выражения, стоящего под знаком суммы при $|z-i|=3$, а именно

$$\left|\frac{(z-i)^n}{3^n n^3}\right|=\frac{3^n}{3^n n^3}=\frac{1}{n^3}.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ непосредственно следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{3^n n^3}$ во всех точках окружности $|z-i|=3$. Таким образом, исследуемый ряд сходится во всех точках z , удовлетворяющих условию $|z-i|\leqslant 3$.

Пример 2. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^n}.$$

Решение: По условию имеем $|c_n| = \dfrac{1}{5^n}$. Для того чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

получим

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n}} = \frac{1}{5}$$

и $R = 5$. Проверим сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^n}$ на окружности $|z| = 5$. Для чего найдём модуль выражения , стоящего под знаком суммы при $|z| = 5$, а именно

$$\left|\frac{z^n}{5^n}\right| = \frac{5^n}{5^n} = 1.$$

Так как при $|z| = 5$ не выполнен необходимый признак сходимости рядов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{5^n} \neq 0,$$

то при $|z| = 5$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^n}$ расходится. Таким образом, исследуемый ряд сходится во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z| < 5$.

Пример 3. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Решение: По условию имеем $|c_n| = \dfrac{1}{n!}$. Для того чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

получим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ сходится во всех точках комплексной плоскости.

7.2. Ряды Тейлора

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в точке z_0 (т.е. дифференцируемая в этой точке и некоторой ее окрестности). Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции f в точке z_0.

Пример 4. Написать ряд Тейлора для функции $f(z) = e^z$ в точке $z = 0$.

Решение: Функция $f(z) = e^z$ аналитическая в точке $z = 0$ и

$$f^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = e^0 = 1.$$

Поэтому ряд Тейлора функции $f(z) = e^z$ в точке $z = 0$ будет иметь вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

7.3. Разложение функции в степенной ряд

В предыдущем пункте было сказано, что сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости. Вполне естественно поставить вопрос о возможности разложения в степенной ряд аналитической функции. Справедливы следующие утверждения:

1) Если функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в круге $|z-z_0| < R$, тогда в каждой точке этого круга она единственным образом представляется сходящимся рядом Тейлора
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$
2) Каждый сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

При разложении функции в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

коэффициенты c_n далеко не всегда эффективно вычисляются по формулам $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Для вычисления коэффициентов ряда Тейлора существует ряд искусственных приемов, которые аналогичны приемам, применяемым в случае функций действительного переменного. При этом используются основные табличные разложения

$$
\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{z^n}{n!} = 1 + z + \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} + \ldots, \quad |z| < \infty,\\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\\
&\qquad |z| < \infty,\\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \tfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |z| < \infty,\\
\operatorname{sh} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} + \ldots + \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad |z| < \infty,\\
\operatorname{ch} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^4}{4!} + \ldots + \tfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |z| < \infty,\\
(1+z)^m &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} z^n = 1 + mz + \tfrac{m(m-1)}{2!} z^2 +\\
&+ \tfrac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \ldots + \tfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} z^n + \ldots,\\
&\qquad m \in \mathbb{Z},\ |z| < 1.
\end{aligned}
$$

Приведём некоторые частные случаи последней формулы.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots, \quad |z| < 1,\\
\tfrac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots, \quad |z| < 1.
\end{aligned}
$$

Пример 5. Непосредственным вычислением $f^{(n)}(0)$ доказать следующую формулу:

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty.$$

Решение: Функция $\sin z$ аналитическая при $|z| < \infty$. Напишем ряд Тейлора для функции $\sin z$ в точке $z = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Найдём $\sin^{(n)}(0)$.

1) Пусть $n = 2k+1$, тогда $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$, $k = 0, 1, \ldots$
2) Пусть $n = 2k$, тогда $\sin^{(2k)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0, k = 0, 1, \ldots$

Тогда ряд Тейлора для функции $\sin z$ в точке $z = 0$ запишется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Отсюда, в силу аналитичности функции $\sin z$, получим равенство:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty.$$

Пример 6. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z = 0$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(e^z + 2e^{-\frac{z}{2}} \cos\frac{z\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решение: Запишем функцию $\cos\frac{z\sqrt{3}}{2}$ через показательную функцию по формуле Эйлера

$$\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = \frac{e^{i\frac{z\sqrt{3}}{2}} + e^{-i\frac{z\sqrt{3}}{2}}}{2}.$$

Тогда

$$2e^{-\frac{z}{2}} \cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{z}{2}(1-i\sqrt{3})} + e^{-\frac{z}{2}(1+i\sqrt{3})}.$$

Опираясь на разложение $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, получим:

$$e^{-\frac{z}{2}(1-i\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z}{2})^n (1-i\sqrt{3})^n}{n!}$$

и

$$e^{-\frac{z}{2}(1+i\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z}{2})^n (1+i\sqrt{3})^n}{n!}.$$

Запишем число $1 + i\sqrt{3}$ и $1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

$$|1 + i\sqrt{3}| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

и

$$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Поэтому

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + 2\pi k) + i\sin(\frac{\pi}{3} + 2\pi k)), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

и

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\cos(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k) + i\sin(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k)), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Возведём оба числа в степень n, получим

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n(\cos(\frac{\pi n}{3} + 2\pi kn) + i\sin(\frac{\pi n}{3} + 2\pi kn)), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

и

$$(1-i\sqrt{3})^n = 2(\cos(\frac{\pi n}{3}+2\pi kn) - i\sin(\frac{\pi n}{3}+2\pi k)), \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Отсюда получим:

$$e^{-\frac{z}{2}(1+i\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z}{2})^n 2^n\cos\frac{\pi n}{3}}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z}{2})^n 2^n\sin\frac{\pi n}{3}}{n!}$$

и

$$e^{-\frac{z}{2}(1+i\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z}{2})^n 2^n\cos\frac{\pi n}{3}}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z}{2})^n 2^n\sin\frac{\pi n}{3}}{n!}.$$

Из полученных равенств имеем:

$$e^z + 2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n\cos\frac{\pi n}{3}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Подставляя последовательно $n=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 6$, окончательно получим

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(e^z + 2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!}.$$

Пример 7. Разложить в степенной ряд функцию

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Решение: Запишем функцию $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ в виде

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)'.$$

Отсюда, используя разложение $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, получим

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,\ |z|<1.$$

Пример 8. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z=0$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}.$$

Решение: Запишем функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ в виде:

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-2}\right).$$

Разложим функцию $\dfrac{1}{z-2}$ в степенной ряд.

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ |z|<2.$$

Окончательно получим

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3}\left((-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right),\ |z|<1.$$

Пример 9. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z=1$ функцию

$$f(z) = \operatorname{ch} z.$$

Решение: Представим функцию $\operatorname{ch} z$ в виде:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(z-1+1) = \operatorname{ch}1\operatorname{ch}(z-1) + \operatorname{sh}1\operatorname{sh}(z-1).$$

Обозначим $z-1=u$, тогда $\operatorname{ch}(z-1)=\operatorname{ch}u$ и $\operatorname{sh}(z-1)=\operatorname{sh}u$. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции $\operatorname{ch}u$ и $\operatorname{sh}u$:

$$\operatorname{ch}u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n}}{(2n)!}, \qquad \operatorname{sh}u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Откуда получим

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{(2n)!} + \operatorname{sh}1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти области сходимости следующих степенных рядов:

234) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(z-i)^n$.

235) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z+i}{in}\right)^n$.

236) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n n^3}$.

237) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{z+i}{1-i}\right)^n$.

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

238) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$.

239) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(in)^n}{n!} z^n$.

240) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3 + i^n)^n z^n$.

241) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2} z^n$.

242) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$.

243) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n + 2^n) z^n$.

244) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n (z - 1 + i)^n$.

Выяснить, в каких точках окружности круга сходимости сходятся следующие ряды:

245) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\sqrt{n}}$.

246) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n \ln^2 n}$.

247) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

248) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(2n)! n!} (-1)^n z^{2n}$.

249) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n} z^{3n}$.

250) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{\pi i n^2}{2}}}{n} z^n$.

251) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{\pi i n^2}{2}}}{\sqrt{n}} z^n$.

Непосредственным вычислением $f^{(n)}(z_0)$ доказать формулы, справедливые для всех z:

252) $e^{az} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{az_0} \dfrac{a^n}{n!} (z - z_0)^n$.

253) $\operatorname{sh} az = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

254) $\operatorname{ch} az = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.

255) $\sin az = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

256) $\cos az = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{a^{2n}}{(2n)!}z^{2n}$.

Опираясь на разложение $e^{az} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}z^n$, доказать формулы:

257) $\cos\sqrt{z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^n}{(2n)!}$.

258) $\dfrac{1}{4}(e^z + e^{-z} + 2\cos z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{4n}}{(4n)!}$.

259) $e^{z\operatorname{ctg}1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos n}{\sin^n 1}\cdot\dfrac{z^n}{n!}$.

Используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, путём почленного дифференцирования доказать формулы:

260) $\dfrac{2}{(1+z)^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n,\ |z|<1$.

261) $\dfrac{1}{z^2+a^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-2n-2}z^{2n},\ |z|<|a|,\ a\neq 0$.

262) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n},\ |z|<1$.

Разложив предварительно производные, путём почленного интегрирования доказать следующие формулы для главных значений многозначных функций:

263) $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n},\ |z|<1$.

264) $\operatorname{arctg} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1$.

Указанные функции разложить в ряд Тейлора по степеням z и определить его радиус сходимости:

265) $\cos^2\dfrac{iz}{2}$.

266) $\operatorname{ch}^2\dfrac{z}{2}$.

267) $\dfrac{iz}{z^2+i}$.

268) $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$.

269) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$.

270) $\dfrac{z}{z^2+2z+2}$.

Разложить в ряд Тейлора:

271) e^z по степеням $(2z-1)$.

272) $\sin z$ по степеням $\left(z+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

273) $\cos(3z-1)$ по степеням $(z+1)$.

274) $\dfrac{1}{7z+3}$ по степеням $(z+2)$.

275) $\dfrac{1}{z^2+1}$ по степеням $(z-1)$.

§8. Ряды Лорана. Изолированные особые точки

8.1. Общие понятия

Среди рядов, отличных от степенных, наиболее близким к степенному является ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(z-z_0)^n}=c_0+\frac{c_1}{(z-z_0)}+\frac{c_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_n}{(z-z_0)^n}+\ldots,$$

где c_n и z_0 комплексные числа, а z комплексное переменное.

Если $z_0=0$, то получаем ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots+\frac{c_n}{z^n}+\ldots$$

Областью сходимости ряда вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$ является внешность круга с центром в точке z_0 и радиусом r с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого круга. Радиус круга определяется по формулам

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

и

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},$$

если пределы существуют.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$ при $|z-z_0|>r$ сходится абсолютно, а при $|z-z_0|<r$ расходится. Множество точек сходимости ряда на окружности $|z-z_0|=r$ может быть пустым, может полностью совпадать с ней, может в одних точках окружности сходиться, а в других расходиться.

Если радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$ число $r>0$, то областью сходимости ряда является внешность круга $|z-z_0|>r$. Если $r=\infty$, то область сходимости вырождается в бесконечно удалённую точку. Если $r=$

0, то областью сходимости является вся комплексная плоскость из которой выброшена точка $z = z_0$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$ определяет функцию

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - z_0| > R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел , удовлетворяющих условию $|z - z_0| = R$. Функция $S(z)$ является аналитической в области сходимости $|z - z_0| > R$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$ определяет функцию

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - z_0| > R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел , удовлетворяющих условию $|z - z_0| = R$. Функция $S(z)$ является аналитической в области сходимости $|z - z_0| > R$.

Пример 1. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n}.$$

Решение: Найдём радиус сходимости ряда.

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n} = e.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^n}{(z-i)^n}$ сходится абсолютно при $|z - i| > e$. Исследуем сходимость ряда на границе круга $|z-i| = e$. Для чего найдём модуль выражения, стоящего под знаком суммы, при $|z - i| = e$, а именно

$$\left| \frac{e^n}{(z-i)^n} \right| = 1.$$

Так как при $|z-i| = e$ не выполнен необходимый признак сходимости рядов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n} \neq 0,$$

то при $|z - i| = e$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^n}{(z-i)^n}$ расходится. Таким образом, исследуемый ряд сходится во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z - i| > e$.

В общем случае рассматривается ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Этот ряд состоит из суммы двух рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба этих ряда. Как было сказано раньше, областью сходимости первого ряда является внешность круга с центром в точке z_0 и радиусом r. Областью сходимости второго ряда является внутренность круга с центром в точке z_0 и радиусом R.

Область сходимости ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ есть:

1) пустое множество, если $r > R$,
2) кольцо $V_{R,r} := \{z | r < |z-z_0| < R\}$ с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого кольца, если $r < R$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ определяет функцию

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $r < |z-z_0| < R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел, удовлетворяющих условию $|z-z_0| = r$, $|z-z_0| = R$. Функция $S(z)$ является аналитической в области сходимости $r < |z-z_0| < R$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(z-3i)^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$.

Решение: Найдём область сходимости ряда по отрицательным степеням $(z-3i)$, вычислив для этого

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(z-3i)^n}$ сходится абсолютно при $|z-3i| > 2$. На границе круга $|z-3i| = 2$ этот ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{(z-3i)^n} \right| = 1 \neq 0.$$

Исследуем второй ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$. Вычислим для этого

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+1)^5}{5^n n^5}=\lim_{n\to\infty}5\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=5.$$

На окружности $|z-3i|=5$ ряд сходится абсолютно, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(z-3i)^n}{5^n n^5}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n n^5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}.$$

Следовательно, область сходимости второго ряда $|z-3i|\leqslant 5$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z-3i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$$

сходится в кольце $2<|z-3i|\leqslant 5$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+2-4i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}n(z+2-4i)^n.$$

Решение: Найдём радиусы сходимости этих рядов

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

и

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1.$$

Получили $R=r$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(z+2-4i)^n}$ на окружности $|z+2-4i|=1$. Он расходится, так как общий член не стремится к нулю. Таким образом, данный ряд всюду расходится.

8.2. Ряды Лорана

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в кольце $V_{R,r}:=\{z\,|r<|z-z_0|<R\}$.

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n\in\mathbb{Z},$$

где Γ – окружность $|z-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$, называется рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $V_{R,r}:=\{z\,|r<|z-z_0|<R\}$.

В исследованиях о разложимости функции в ряд Лорана основными являются следующие утверждения:

1. Однозначная аналитическая в кольце $V_{R,r} := \{z \,| r < |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ в каждой точке кольца $V_{R,r}$ единственным образом представляется сходящимся рядом Лорана.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \;\; c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

называют главной частью ряда Лорана. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называют правильной частью ряда Лорана.

2. Если функция $f(z)$ аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, то ряд Лорана в этом круге совпадает с рядом Тейлора для этой функции.

3. Любой ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ в кольце сходимости является рядом Лорана своей суммы

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

На практике, при разложении функции $f(z)$ в кольце $V_{R,r}$ в ряд Лорана, формула $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, $n \in \mathbb{Z}$ для вычисления коэффициентов ряда Лорана применяется редко. Для получения Лорановских разложений можно воспользоваться любым законным приемом. Часто при этом используются известные разложения функций в ряд Тейлора, которые приведены в предыдущем параграфе.

Пример 4. Функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$ разложить в ряд Лорана в кольце $V_{4,0} := \{z \,| 0 < |z - 2i| < 4\}$.

Решение: Запишем $f(z)$ в виде суммы простых дробей

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4} = -\frac{i}{4(z - 2i)} + \frac{i}{4(z + 2i)} = -\frac{i}{4(z - 2i)} + \frac{1}{16(1 + \frac{(z-2i)}{4i})}.$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $\dfrac{1}{16\left(1+\frac{z-2i}{4i}\right)}$. Так как $\left|\frac{z-2i}{4i}\right|<1$ в кольце $0<|z-2i|<4$, то воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ \ |z|<1,$$

и получим

$$\frac{1}{16(1+\frac{(z-2i)}{4i})}=16\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(z-2i)}{4i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{4^{n+2}}(z-2i)^n.$$

Окончательно имеем

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}=-\frac{i}{4(z-2i)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{4^{n+2}}(z-2i)^n.$$

Пример 5. Функцию $f(z)=ze^{\frac{1}{z-1}}$ разложить в ряд Лорана в кольце $V_{3,0}:=\{z\,|0<|z-1|<3\}$.

Решение: Обозначим $z-1=u$, тогда $f(z)=(u+1)e^{\frac{1}{u}}$. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора показательной функции:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Откуда

$$e^{\frac{1}{u}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{u}\right)^n,\ \ |u|\neq 0.$$

Окончательно получим

$$f(z)=(u+1)e^{\frac{1}{u}}=(u+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{u}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{u^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{u^n}=$$
$$=u+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{u^n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{u^n}=u+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}\frac{1}{u^n}=$$
$$=z+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}\frac{1}{(z-1)^n},\ \ |z-1|>0.$$

Пример 6. Разложить функцию

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

в ряд Лорана 1) в круге $|z| < 1$, 2) в кольце $V_{2,1} := \{z : \ 1 < |z| < 2\}$, 3) в кольце $V_{\infty,1} := \{z : \ 2 < |z| < \infty\}$.

Решение: Запишем $f(z)$ в виде суммы простых дробей

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}.$$

1) Так как функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, то ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора для этой функции.
Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ |z| < 1.$$

Откуда будем иметь:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \ \left|\frac{z}{2}\right| < 1.$$

Таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n, \ |z| < 1.$$

2) Для аналитической в круге $|z| < 2$ функции $\frac{1}{z-2}$ в кольце

$$V_{2,1} := \{z \ |1 < |z| < 2\}$$

справедливо разложение в ряд Тейлора

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \ |z| < 2,$$

приведенное в предыдущем пункте. А для функции $\dfrac{1}{1-z}$ будем иметь

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \ |z| > 1.$$

Окончательно

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \ 1 < |z| < 2.$$

3) При $|z| > 2$ дробь $\dfrac{1}{1-z}$ имеет то же разложение, что и в предыдущем пункте, а дробь $\dfrac{1}{z-2}$ разлагается следующим образом:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

Итак,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)\frac{1}{z^n},\ |z| > 2.$$

8.3. Изолированные особые точки однозначного характера

Пусть функция f не является аналитической в точке $z = a$. Точка $z = a$ называется изолированной особой точкой функции f, если существует такая проколотая окрестность этой точки, т.е. кольцо $V_{R,0} := \{z\ |0 < |z| < R\}$, в котором функция f аналитическая.

Пусть $z = a$ – изолированная особая точка функции f. Рассмотрим разложение в кольце $V_{R,0}$ функции f в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

В зависимости от разложения различают три типа изолированных особых точек.

1. Если в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть, т.е. члены с отрицательными степенями

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

то точка $z = a$ называется устранимой особой точкой функции f.

При подходе к устранимой особой точке $z = a$ функция f имеет конечный предел, и если его принять в качестве значения функции в точке $z = a$, то f становится аналитической в точке $z = a$.

2. Если в разложении в ряд Лорана главная часть содержит конечное число членов

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ m > 0,\ c_m \neq 0,$$

то точка $z = a$ называется полюсом порядка m функции f.

Изолированная особая точка $z = a$ функции f является полюсом тогда и только тогда, когда
$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

Пусть функция $\varphi(z)$ аналитическая в точке $z = a$. Точка $z = a$ называется нулем порядка k функции $\varphi(z)$, если
$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = ... = \varphi^{(k-1)}(z_0) = 0,\ \varphi^{(k)}(z_0) \neq 0.$$
Если в точке z_0 функция $\varphi(z)$ имеет нуль порядка k, то в её разложении в ряд Тейлора будут отсутствовать первые k членов, а именно:
$$\varphi(z) = \frac{\varphi^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{\varphi^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1} + ... =$$
$$= c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + ... = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n =$$
$$= (z-z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-k} = (z-z_0)^k\psi(z),$$
где функция $\psi(z)$ аналитическая в точке z_0 и $\psi(z_0) \neq 0$.

Точка $z = a$ является полюсом порядка m функции f тогда и только тогда, когда функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ аналитическая в точке $z = a$ и точка $z = a$ её нуль порядка m.

3. Если в разложении в ряд Лорана главная часть содержит бесконечное число членов
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$
то точка $z = a$ называется существенно особой точкой функции f.

Для того, чтобы изолированная особая точка $z = a$ была существенно особой точкой функции f, необходимо и достаточно, чтобы f не имела предела при $z \to a$.

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую вне круга $|z| > R$, за исключением, быть может, бесконечно удалённой точки. Выполним преобразование $\xi = \dfrac{1}{z}$. Сведём изучение функции $f(z)$ к изучению функции $\psi(\xi) = f(\frac{1}{\xi}) = f(z)$ в окрестности точки $\xi = 0$. Точка $z = \infty$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если точка $\xi = 0$ будет устранимой особой точкой функции $\psi(\xi)$. Точка $z = \infty$ называется полюсом порядка m функции $f(z)$, если точка $\xi = 0$ будет полюсом порядка m функции $\psi(\xi)$. Точка $z = \infty$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если точка $\xi = 0$ будет существенно особой точкой функции $\psi(\xi)$.

Пример 7. Найти изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{\sin z(z^2+4)}{z}$$

и определить их тип.

Решение: Найдём точки, где функция $f(z)$ не определена. Такими точками являются точки $z=0$ и $z=\infty$.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z=0$. Так как

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z(z^2+4)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}(z^2+4) = 4,$$

то точка $z=0$ является устранимой особой точкой.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z=\infty$. Выполнив преобразование $z=\dfrac{1}{\xi}$, будем иметь:

$$\psi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi \sin\frac{1}{\xi}\left(\left(\frac{1}{\xi}\right)^2+4\right) = \frac{1}{\xi}\sin\frac{1}{\xi}(1+4\xi^2) = \frac{1}{\xi}\sin\frac{1}{\xi} + 4\xi\sin\frac{1}{\xi}.$$

Разложим функцию $\sin\frac{1}{\xi}$ в окрестности точки $\xi=0$ в ряд Лорана

$$\sin\frac{1}{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{\xi^{2n+1}}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\xi} - \frac{(\frac{1}{\xi})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{\xi^5}}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{\frac{1}{\xi^{2n+1}}}{(2n+1)!} + \ldots, \ |\xi|>0.$$

Окончательно получим

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{\xi^{2n+2}}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{\xi^{2n}}}{(2n+1)!}.$$

В разложении ряда Лорана функции $\psi(\xi)$ в окрестности точки $\xi=0$ главная часть содержит бесконечное число членов, поэтому точка $\xi=0$ является существенно особой точкой функции $\psi(\xi)$. А точка $z=\infty$ существенно особой точкой функции $f(z)$.

Пример 8. Найти изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2(z-i)}$$

и определить их тип.

Решение: Найдём точки, где функция $f(z)$ не определена. Такими точками являются точки $z=-2i$ и $z=i$.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z=-2i$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = (z+2i)^2(z-i) = (z+2i)^2\psi(z),$$

где $\psi(z) = (z - i)$, $\psi(-2i) = -3i \neq 0$. Откуда следует, что $z = -2i$ нуль второго порядка функции $\varphi(z)$, а значит $z = -2i$ полюс второго порядка функции $f(z)$.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z = i$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = (z + 2i)^2 (z - i) = (z - i)^2 \psi(z),$$

где $\psi(z) = (z + 2i)^2$, $\psi(i) = -9 \neq 0$. Откуда следует, что $z = i$ нуль первого порядка функции $\varphi(z)$, а значит $z = i$ полюс первого порядка функции $f(z)$.

Пример 9. Найти изолированные особые точки функции

$$f(z) = z e^{\frac{1}{z-1}}$$

и определить их тип.

Решение: Найдём точки, где функция $f(z)$ не определена. Такими точками являются точки $z = 1$ и $z = \infty$.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z = 1$. Разложим функцию $ze^{\frac{1}{z-1}}$ в окрестности точки $z = 1$ в ряд Лорана (см. пример 5), получим:

$$f(z) = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{1}{(z-1)^n}, \; |z - 1| > 0.$$

Из этого разложения следует, что $z = 1$ является существенно особой точкой.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z = \infty$. Выполнив преобразование $z = \frac{1}{\xi}$, получим :

$$\nu(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi} e^{\frac{1}{\frac{1}{\xi}-1}} = \frac{1}{\xi} e^{\frac{\xi}{1-\xi}}.$$

Исследуем поведение функции $\nu(\xi)$ в окрестности точки $\xi = 0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\nu(\xi)} = \xi \frac{1}{e^{\frac{\xi}{1-\xi}}} = \xi \psi(\xi),$$

где $\psi(\xi) = \frac{1}{e^{\frac{\xi}{1-\xi}}}$, $\psi(0) = 1 \neq 0$. Откуда следует, что $\xi = 0$ нуль первого порядка функции $\varphi(\xi)$, а значит $\xi = 0$ полюс первого порядка функции $\nu(\xi)$. А точка $z = \infty$ является нулём первого порядка функции $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$.

Пример 10. Определить тип изолированной особой точки $z = 0$ функции

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{\sin z (\sin z - z)}.$$

Решение: Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{\sin z(\sin z-z)}{\sin 3z-3\sin z}=\frac{(z-\frac{1}{6}z^3+...)(-\frac{1}{6}z^3+...)}{3z-\frac{9}{2}z^3+...-3z+\frac{1}{2}z^3+...}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{6}z^4+...}{-4z^3+...}=\frac{z^4(-\frac{1}{6}+...)}{z^3(-4+...)}=z\frac{-\frac{1}{6}+...}{(-4+...)}=z\psi(z),$$

где $\psi(z)=\frac{-\frac{1}{6}+...}{(-4+...)}, \psi(0)=\frac{1}{24}\neq 0$. Откуда следует, что $z=0$ нуль первого порядка функции $\varphi(z)$, а значит $z=0$ полюс первого порядка функции $f(z)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти области сходимости следующих рядов:

276) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{(z-i)^n}$.

277) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^3}{(z+2i)^n}$.

278) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1}\left(\frac{4+3i}{z+1}\right)^n$.

279) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$.

280) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$.

281) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-n^2}{(z+2)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{(n+i)^n}$.

282) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sh}\,n}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2}$.

283) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^{-n}}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n^2+1}$.

284) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z+3i)^n}{n^4+3}$.

285) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{-n}\,\mathrm{ch}\,\frac{i}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

286) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}^n(1+i\frac{\pi n}{2})}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{7^n n^2}(z-i)^n$.

287) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2-i)^{-n}}{(2+(-1)^n)^n}$.

288) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1+i)^{-n}}{5^n(2+(-1)^n)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+1+i)^n(2+(-1)^n)^n}{5^n}$.

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = z_0$ следующие функции:

289) $z^4 \sin^2 \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

290) $\cos \dfrac{i}{z} + \dfrac{z}{z-1}$, $z_0 = 0$.

291) $\dfrac{1}{(z+2)z}$, $z_0 = -2$.

292) $\dfrac{1}{(z-3)^2 z}$, $z_0 = 1$.

293) $z \cos \dfrac{1}{2z+1}$, $z_0 = -\dfrac{1}{2}$.

294) $\sin \dfrac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$.

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ следующие функции:

295) $\dfrac{z}{2z+5}$.

296) $\dfrac{3z}{z^2-1}$.

297) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

298) $\dfrac{z}{z^2+2z+2}$.

Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ в указанном кольце следующие функции:

299) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$, $(z_0 = 1,\ 1 < |z-1| < 2)$.

300) $\dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$, $(z_0 = 1,\ 1 < |z-1| < 2)$.

301) $\dfrac{z+i}{z^2}$, $(z_0 = i,\ 0 < |z| < 2)$.

302) $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, $(z_0 = 1,\ 0 < |z| < 3)$.

303) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $(z_0 = 0,\ 1 < |z| < 2)$.

304) $\dfrac{2z}{z^2-2i}$, $(z_0 = 1,\ 0 < |z| < 2)$.

305) $\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, $(z_0 = -1,\ 0 < |z+1| < 3)$.

306) $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$, $(z_0 = 0,\ 2 < |z| < 10)$.

307) $z^3 e^{\frac{1}{z}}$, $(z_0 = 0,\ 0 < |z| < \infty)$.

308) $z^2 \sin \pi \dfrac{z+1}{z}$, $(z_0 = 0,\ 0 < |z| < \infty)$.

309) $z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$, $(z_0 = 2,\ 0 < |z-2| < \infty)$.

310) $\dfrac{e^z}{z(1-z)}$, $(z_0 = 0,\ 0 < |z| < \infty)$.

311) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(1+z)}$, $(z_0 = 1,\ 1 < |z-1| < 2)$.

Доказать, что точка $z = z_0$ является устранимой особой точкой для следующих функций:

312) $\dfrac{z^2-1}{z-1}$, $(z_0 = 1)$.

313) $\dfrac{\sin z}{z}$, $(z_0 = 0)$.

314) $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$, $(z_0 = 0)$.

315) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$, $(z_0 = 0)$.

316) $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$, $(z_0 = 0)$.

317) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{\sin z}$, $(z_0 = 0)$.

318) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$, $(z_0 = \infty)$.

Доказать, что точка $z = z_0$ является полюсом для следующих функций:

319) $\dfrac{1}{z}$, $(z_0 = 0)$.

320) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $(z_0 = i)$.

321) $\dfrac{z^2+1}{z+1}$, $(z_0 = \infty)$.

322) $\dfrac{z}{1-\cos z}$, $(z_0 = 0)$.

323) $\dfrac{z}{(e^z-1)^2}$, $(z_0 = 0)$.

324) $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{z}$, $(z_0 = \infty)$.

325) $\dfrac{z}{e^z+1}$, $(z_0 = \pi i)$.

326) $\operatorname{tg} \pi z$, $(z_0 = \dfrac{1}{2})$.

Доказать, что точка $z = z_0$ является существенно особой точкой функций:

327) e^z, $(z_0 = \infty)$.

328) e^{-z^2}, $(z_0 = \infty)$.

329) $\sin\dfrac{\pi}{z^2}$, $(z_0 = 0)$.

330) $z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$, $(z_0 = 0)$.

331) $\cos\dfrac{z}{z+1}$, $(z_0 = -1)$.

Найти все изолированные особые точки однозначного характера и определить их тип для следующих функций:

332) $\dfrac{1}{z^3}e^{iz}$.

333) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}$.

334) $\dfrac{z^2}{\cos z - 1}$.

335) $\dfrac{z^4+1}{z^4-1}$.

336) $z\cos\dfrac{1}{z} - z$.

§9. Вычеты и их применения

9.1. Вычет относительно изолированной конечной точки

Вычетом аналитической функции f относительно её изолированной особой точки $z = a$ называется коэффициент c_{-1} при первой отрицательной степени разложения функции f в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Обозначение вычета:

$$c_{-1} = \operatorname*{res}_a f(z).$$

Принимая во внимание интегральное преставление для коэффициентов ряда Лорана, имеем

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(z)dz,$$

где Γ окружность с центром в точке $z = a$, $\Gamma \subset O_a$ (O_a - окрестность точки, где функция f аналитическая).

Заметим, что в случае когда $z = a$ устранимая особая точка, $\operatorname*{res}_a f(z) = 0$. Если $z = a$ – полюс первого порядка, то $\operatorname*{res}_a f(z) \neq 0$. В остальных случаях $\operatorname*{res}_a f(z)$ может быть равным, а может и не быть равным нулю.

Пусть $z = a$ полюс функции f порядка m. Вычет функции f в точке $z = a$ может быть найден по формуле:

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-a)^{m-1}).$$

Для полюса первого порядка получим

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \lim_{z\to a} f(z)(z-a).$$

Часто оказывается полезной небольшая модификация последней формулы.

Пусть функция f в окрестности полюса первого порядка $z = a$ имеет вид

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в точке $z = a$ функции, причём $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, имеем

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Пример 1. Найти $\operatorname*{res}_1 ze^{\frac{1}{z-1}}$.

Решение: В примере предыдущего параграфа мы нашли разложение этой функции в окрестности точки $z = 1$ в ряд Лорана, а именно:

$$f(z) = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}\frac{1}{(z-1)^n},\ |z-1| > 0.$$

Из этого разложения следует, что $c_1 = \frac{3}{2}$, т.е. $\operatorname*{res}_1 ze^{\frac{1}{z-1}} = \frac{3}{2}$.

Пример 2. Найти $\operatorname*{res}_0 \dfrac{\cos z - 1}{z^2 \sin z}$.

Решение: В точке $z = 0$ данная функция имеет полюс первого порядка, так как

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2\sin z}{\cos z - 1} = -\frac{z^2\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} = -z\frac{z\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} = z\varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = -\frac{z\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \quad \text{и} \quad \lim_{z\to 0}\varphi(z) = -2.$$

Отсюда получим, что

$$\operatorname*{res}_0 f(z) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\varphi(z)} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найти $\operatorname*{res}_{\frac{\pi k}{2}} \operatorname{ctg} 2z,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решение: В точке $z = \frac{\pi k}{2}$ данная функция имеет полюс первого порядка, так как

$$\operatorname{ctg} 2z = \frac{\cos 2z}{\sin 2z}, \ \cos \pi k \neq 0, \ \sin \pi k = 0, \ (\sin 2z)'|_{z=\frac{\pi k}{2}} = 2\cos 2z|_{z=\frac{\pi k}{2}} \neq 0.$$

Воспользуемся формулой для вычисления вычета в случае полюса первого порядка:

$$\operatorname*{res}_{\frac{\pi k}{2}} \operatorname{ctg} 2z = \left[\frac{\cos 2z}{\sin 2z}\right]_{z=\frac{\pi k}{2}} = \left[\frac{\cos 2z}{2\cos 2z}\right]_{z=\frac{\pi k}{2}} = \frac{1}{2}.$$

В случае, когда функция f определена формулой $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имееют в точке $z = a$ нули порядка выше первого, для вычисления вычета удобно заменить функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ некоторым количеством членов их разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z = a$.

Пример 4. Найти $\operatorname*{res}\limits_{0} \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$.

Решение: Как показано в примере 10 предыдущего параграфа, в точке $z = 0$ данная функция имеет полюс первого порядка. Воспользуемся представлением (см. пример 10)

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)} = \frac{1}{z}\frac{(-4 + ...)}{-\frac{1}{6} + ...}.$$

Откуда

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z}\frac{(-4 + ...)}{-\frac{1}{6} + ...} = 24.$$

Пример 5. Найти $\operatorname*{res}\limits_{0} \dfrac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}$.

Решение: Покажем, что в точке $z = 0$ данная функция имеет полюс второго порядка. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^2(z-1)}{z^2 + z - 1} = z^2\frac{z-1}{z^2 + z - 1} = z^2\psi(z),$$

где $\psi(z) = \dfrac{z-1}{z^2 + z - 1}$, $\psi(0) = 1 \neq 0$. Откуда следует, что $z = 0$ нуль второго порядка функции $\varphi(z)$, а значит $z = 0$ полюс второго порядка функции $f(z)$. Найдём

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2} = 0.$$

9.2. Вычет относительно бесконечности

Пусть $z = \infty$ изолированная особая точка функции f.

Вычетом функции f относительно бесконечности называется коэффициент c_{-1} при первой отрицательной степени разложения функции f в ряд Лорана в окрестности бесконечности, умноженный на -1.

Обозначение вычета:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$$

где Γ окружность с центром в точке $z = 0$, $\Gamma \subset O_\infty$ (функция f аналитическая в окрестности $O_\infty = \{z\,|r < |z| < \infty\}$).

Пример 6. Найти $\operatorname*{res}\limits_{\infty} \dfrac{1}{1-z}$.

Решение: Для функции $\dfrac{1}{1-z}$ при $|z| > 1$ справедливо представление:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\ \ |z| > 1.$$

По определению $\operatorname*{res}\limits_{\infty} \frac{1}{1-z} = -c_{-1} = 1$.

Сумма вычетов функции f во всех её конечных особых точках $a_k,\ k = 1, 2, ..., n$ и вычета на бесконечности равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Пример 7. Найти $\operatorname*{res}\limits_{\infty} \dfrac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z^2(z^2-1)}$.

Решение: Представим функцию f в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z+1} + \frac{3}{2(z-1)}.$$

Особыми точками функции f являются точки

$$z_1 = 0,\ z_2 = -1,\ z_3 = 1,\ z_4 = \infty.$$

Поскольку точки $z_1,\ z_2,\ z_3$ полюсы первого порядка, то

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = 2,\ \operatorname*{res}_{-1} f(z) = 4,\ \operatorname*{res}_{1} f(z) = \frac{3}{2}.$$

Согласно формуле

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) + \operatorname*{res}_{-1} f(z) + \operatorname*{res}_{1} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$$

получим

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{0} f(z) - \operatorname*{res}_{-1} f(z) - \operatorname*{res}_{1} f(z) = -7,5.$$

9.3. Вычисление интегралов с помощью вычетов

Если функция $f(z)$ аналитическая в области D, кроме конечного числа особых точек $a_k, k = 1, 2, \ldots, n$ и аналитична на границе Γ области D, ориентированной положительно относительно области D, тогда

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f(z).$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1} dz$, где кривая Γ – граница области $G:\ |z| < 2$.

Решение: Функция $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ имеет две изолированные особые точки $z_1 = i, z_2 = -i$ полюсы первого порядка. Обе эти точки содержатся внутри круга $|z| \leqslant 2$. Поскольку

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

и аналогично

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{2i},$$

то по формуле

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i(\operatorname*{res}_{i} f(z) + \operatorname*{res}_{-i} f(z))$$

получим $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} = 0$.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} ze^{\frac{1}{z-1}} dz$, где кривая Γ – граница области $G:\ |z-1| < 3$.

Решение: Функция $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$ имеет одну изолированную особую точку $z = 1$ внутри круга G. Как показано в примере 5 предыдущего параграфа, функция $ze^{\frac{1}{z-1}}$ в окрестности точки $z = 1$ раскладывается в ряд Лорана

$$ze^{\frac{1}{z-1}} = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!}\frac{1}{(z-1)^n},\ |z-1| > 0.$$

Поэтому $c_{-1} = \operatorname*{res}\limits_{1} ze^{\frac{1}{z-1}} = \frac{3}{2}$. Окончательно получим

$$\int\limits_{\Gamma} ze^{\frac{1}{z-1}}dz = 2\pi i\frac{3}{2} = 3\pi i.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

337) $\operatorname*{res}\limits_{0} \dfrac{\sin z}{z^2}$.

338) $\operatorname*{res}\limits_{\infty} e^{\frac{1}{z}}$.

339) $\operatorname*{res}\limits_{1} \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$.

340) $\operatorname*{res}\limits_{\infty} z^2 \sin\dfrac{\pi}{z}$.

341) $\operatorname*{res}\limits_{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}$.

342) $\operatorname*{res}\limits_{0} \sin z \sin\dfrac{1}{z}$.

343) $\operatorname*{res}\limits_{-1} \sin\dfrac{z}{z+1}$.

Найти вычеты следующих функций во всех их конечных особых точках:

344) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$.

345) $\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$.

346) $\dfrac{\cos z}{(z-2)^2}$.

347) $\dfrac{\sin \pi z}{(z-3)^3}$.

348) $\operatorname{tg} z$.

349) $\operatorname{cth} z$.

350) $\operatorname{cth}^2 \pi z$.

351) $\dfrac{1}{e^z+1}$.

352) $\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

353) $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$.

354) $\cos\dfrac{\pi(z+2)}{2z}$.

355) $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$.

356) $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$.

Вычислить с помощью теории вычетов:

357) задачи 210) – 233).

Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, где Γ – положительно ориентированная граница области G:

358) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^2}{\sin^3 z\cos z}dz,\ G:|z|>1.$

359) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}dz,\ G:|z|>4.$

360) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos z}{z^3}dz,\ G:|z|<1.$

361) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz,\ G:|z|<1.$

362) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz,\ G:|z|<2.$

363) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z}{e^{z^2}-1}dz,\ G:|z|>4.$

364) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^3}{e^{z^2}-1}dz,\ G:|z|<4.$

365) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}z^2\sin\frac{1}{z}dz,\ G:|z|>1.$

366) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz,\ G:|z-3|+|z+3|<10.$

ГЛАВА III

Операционное исчисление

§1. Основные определения

Преобразованием Лапласа для функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \tag{1}$$

$f(t)$ называется оригиналом, $F(p)$ – изображением. Связь между оригиналом и изображением с помощью формулы (1) мы будем записывать символически

$$f(t) \to F(p).$$

Применяются также записи

$$f(t) \risingdotseq F(p),$$
$$f(t) \dot{\leftarrow} F(p).$$

В выражении (1) оригиналом $f(t)$ может быть любая комплексная функция действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале.
2) $f(t) = 0$ при $t < 0$.
3) при $t \to +\infty$ функция $f(t)$ либо остаётся конечной, либо, если растёт по модулю, то не быстрее экспоненты, то есть существуют некоторые постоянные $M > 0$, и $s_0 > 0$ такие, что $|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}$ для любого t.

Изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Пример 1. Показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin 3t & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом.

Решение: Для того чтобы показать, что заданная функция является оригиналом, необходимо проверить, выполняются ли условия 1), 2), 3).

Условие 1) выполняется в силу того, что существует интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{2t} \sin 3t \, dt$$

для любых конечных t_1 и t_2.

Условие 2) выполняетя в силу задания функции ($f(t) = 0$ при $t < 0$).

Условие 3) тоже выполнено, так как для любых вещественных t верна оценка $|e^{2t} \sin 3t| \leqslant e^{2t}$, поэтому в качестве M в условии 3) можно взять любое число большее 1, а $s_0 = 2$.

Заметим, что простейшим оригиналом является так называемая единичная функция Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Замечание. В дальнейшем будем считать все функции $f(t)$ равными нулю при $t < 0$.

Пример 2. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t) = e^{3t}.$$

Решение: Для функции $f(t) = e^{3t}$ имеем $s_0 = 3$. Значит, изображение $F(p)$ является определённой функцией и аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 3$. Найдём $F(p)$ по формуле (1)

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{3t} e^{-pt} dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-3)t} dt = \frac{1}{-(p-3)} e^{-(p-3)t} \Big|_0^{+\infty} \quad (\operatorname{Re} p = s > 3).$$

Итак, $F(p) = \frac{1}{p-3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Проверить, какие из указанных функций являются оригиналами:

1) $f(t) = b^t, \ b > 0, \ b \neq 1$.
2) $f(t) = e^{(2+3i)t}$.
3) $f(t) = \dfrac{1}{t-3}$.
4) $f(t) = t^2$.
5) $f(t) = \operatorname{ch}(3 - i)$.
6) $f(t) = \operatorname{tg} t$.
7) $f(t) = t^t$.
8) $f(t) = e^{-t} \cos t$.

9) $f(t) = e^{t^2}$.

10) $f(t) = e^{-t^2}$.

11) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2}$.

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

12) $f(t) = t$.

13) $f(t) = \sin 3t$.

14) $f(t) = te^t$.

15) Может ли функция $\varphi(p) = \dfrac{1}{\cos p}$ служить изображением некоторого оригинала?

§2. Свойства преобразования Лапласа

2.1. Свойство линейности

Для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \to \alpha F(p) + \beta G(p),$$

где

$$f(t) \to F(p),\ \ g(t) \to G(p).$$

2.2. Теорема подобия

Для любого постоянного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

2.3. Дифференцирование оригинала

Если функции $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, причём $f(t) \to F(p)$, то

$$\begin{array}{lcl}
f'(t) & \to & pF(p) - f(0), \\
f''(t) & \to & p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\
\multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
f^{(n)}(t) & \to & p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),
\end{array}$$

где под $f^{(k)}(0)$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ понимается $\lim\limits_{t\to 0+} f^{(k)}(t)$.

Пример 1. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции

$$f(t) = \sin^2 t.$$

Решение: Пусть

$$f(t) \to F(p).$$

Тогда

$$f'(t) \to pF(p) - f(0).$$

Учитывая, что $f(0) = 0$ и $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$ находим

$$\sin 2t \to \frac{2}{p^2+4},$$

следовательно

$$\frac{2}{p^2+4} = pF(p) \quad \Rightarrow \quad F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

В результате получаем

$$\sin^2 t \to \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

2.4. Дифференцирование изображения

Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала

$$-tf(t) \to F'(p)$$

и

$$(-t)^n f(t) \to F^n(p), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пример 2. Найти изображение функции

$$f(t) = t^2 e^t.$$

Решение: Так как $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то по теореме о дифференцировании изображения получаем

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' = -\frac{1}{(p-1)^2}, \quad te^t \to \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Далее

$$\left[-\frac{1}{(p-1)^2}\right]' = -\frac{2!}{(p-1)^3},$$

откуда

$$t^2 e^t \to \frac{2}{(p-1)^3}.$$

2.5. Интегрирование оригинала

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p, то есть если

$$f(t) \to F(p),$$

то

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \to \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 3. Найти изображение функции $\int\limits_0^t e^{\tau}\,d\tau$.

Решение: Так как $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то по теореме об интегрировании оригинала получаем

$$\int\limits_0^t e^{\tau}\,d\tau \to \frac{\frac{1}{p-1}}{p}, \qquad \int\limits_0^t e^{\tau}\,d\tau \to \frac{1}{p(p-1)}.$$

2.6. Интегрирование изображения

Если $\int\limits_p^{+\infty} F(p)\,dp$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \to \int\limits_p^{+\infty} F(p)\,dp.$$

Пример 4. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Решение: Так как $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$, то на основании теоремы об интегрировании изображения имеем

$$\frac{\sin t}{t} \to \int\limits_p^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^2+1} = \operatorname{arctg}\tau\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

2.7. Теорема смещения

Если $f(t) \to F(p)$, то для любого комплексного p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \to F(p - p_0).$$

Пример 5. Найти изображение функции $f(t) = e^{-t}\cos 2t$.

Решение: Так как $\cos 2t \to \frac{p}{p^2+4}$, то по теореме смещения ($p_0 = -1$) имеем
$$e^{-t}\cos 2t \to \frac{p+1}{(p+1)^2+4}.$$

2.8. Теорема запаздывания

Если $f(t) \to F(p)$, то для любого положительного τ
$$f(t-\tau) \to e^{-p\tau}F(p).$$

Теорему запаздывания целесообразно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Пример 6. Найти изображение функции
$$f(t-1) = (t-1)^2.$$

Решение: Для функции $f(t) = t^2$ имеем
$$f(t) \to \frac{2}{p^2}.$$
По теореме запаздывания для функции $(t-1)^2$ получаем
$$(t-1)^2 \to e^{-p}\frac{2}{p^2}.$$
Здесь существенно, что ищется изображение функции $f(t-1)$, равной нулю при $t < 1$ ($t-1 < 0$ по предположению, см. с. 142.)

2.9. Теорема умножения Бореля (теорема о свёртке)

Пусть
$$f(t) \to F(p), \quad \varphi(t) \to \Phi(p).$$
Произведение двух изображений $F(p)$ и $\Phi(p)$ также является изображением, причём
$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \to F(p)\cdot\Phi(p).$$

Интеграл в левой части называется свёрткой функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ и обозначается символом $f(t) * \varphi(t)$:
$$f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(t) * f(t).$$

Пример 7. Найти изображение функции

$$\psi(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)e^{\tau}\,d\tau.$$

Решение: Функция $\psi(t)$ является свёрткой функций

$$f(t) = t \quad \text{и} \quad \varphi(t) = e^t.$$

По теореме умножения

$$\psi(t) \to \Psi(p),$$

$$\Psi(p) = F(p)\cdot\Phi(p) = \tfrac{1}{p^2}\cdot\tfrac{1}{p-1} = \tfrac{1}{p^2(p-1)},$$

$$\int\limits_0^t (t-\tau)e^{\tau}\,d\tau \to \tfrac{1}{p^2(p-1)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

16) $f(t) = 1 + t$.
17) $f(t) = 2\sin t - \cos t$.
18) $f(t) = t + \dfrac{1}{2}e^{-t}$.

Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

19) $f(t) = e^{\alpha t}$.
20) $f(t) = \sin 4t$.
21) $f(t) = \cos\omega t$.
22) $f(t) = \operatorname{sh} 3t$.

Пользуясь теоремой линейности, найти изображения следующих функций:

23) $f(t) = \sin^2 t$.
24) $f(t) = \sin mt\cdot\cos nt$.
25) $f(t) = \cos^3 t$.
26) $f(t) = \sin mt\cdot\sin nt$.
27) $f(t) = \sin^4 t$.
28) $f(t) = \cos mt\cdot\cos nt$.

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих функций:

29) $f(t) = \cos^3 t$.
30) $f(t) = \sin^3 t$.
31) $f(t) = t\sin\omega t$.
32) $f(t) = \cos^4 t$.

33) $f(t) = t\cos\omega t$.
34) $f(t) = te^t$.
35) $f(t) = t^2\cos t$.
36) $f(t) = t(e^t \operatorname{ch} t)$.
37) $f(t) = (t+1)\sin 2t$.
38) $f(t) = t\operatorname{sh} 3t$.

Найти изображения следующих функций:

39) $f(t) = \int\limits_0^t \sin\tau\,d\tau$.
40) $f(t) = \int\limits_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau\,d\tau$.
41) $f(t) = \int\limits_0^t \tau\operatorname{sh} 2\tau\,d\tau$.
42) $f(t) = \int\limits_0^t \cos^2\omega\tau\,d\tau$.
43) $f(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch}\omega\tau\,d\tau$.
44) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.
45) $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$.
46) $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$.
47) $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t}$.
48) $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}$.
49) $f(t) = \dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}$.
50) $f(t) = \dfrac{e^t - 1 - t}{t}$.
51) $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$.
52) $f(t) = e^{2t}\sin t$.
53) $f(t) = e^t\cos nt$.
54) $f(t) = e^{-t}t^3$.
55) $f(t) = e^{-t}\operatorname{sh} t$.
56) $f(t) = te^t\cos t$.
57) $f(t) = e^{3t}\sin^2 t$.

58) $f(t) = e^{-\alpha t}\cos^2\beta t.$

59) $f(t) = \sin(t-b).$

60) $f(t) = \cos^2(t-b).$

61) $f(t) = e^{t-2}.$

62) $f(t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau\,d\tau.$

63) $f(t) = \int\limits_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}d\tau.$

64) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^2\,\mathrm{ch}\,\tau\,d\tau.$

65) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^n f(\tau)\,d\tau.$

66) $f(t) = \int\limits_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau.$

§3. Нахождение оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ применяются следующие действия. Если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная[1] рациональная[2] дробь, то эту дробь необходимо разложить в сумму простых дробей и найти оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства пунктов 2.1 – 2.9 преобразования Лапласа.

Пример 1. Найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}.$$

Решение: Разложим $F(p)$ в сумму простых дробей.

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

[1]рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.

[2]дробь называется рациональной, если она является отношением двух многочленов.

Методом неопределённых коэффициентов находим неизвестные коэффициенты A, B, C, D.

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& A(p-1)(p^2+4) + Bp(p^2+4) + (Cp+D)p(p-1). \\ 1 &=& A(p^3 - p^2 = 4p - 4) + B(p^3+4p) + C(p^3-p^2) + D(p^2-p). \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} A+B+C &=& 0, \\ A+C-D &=& 0, \\ 4A+4B-D &=& 0, \\ 4A &=& -1. \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rclrcl} A &=& -\frac{1}{4}, & B &=& \frac{1}{5}, \\ C &=& \frac{1}{20}, & D &=& -\frac{1}{5}. \end{array}$$

Получаем следующее выражения для $F(p)$:

$$F(p) = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+4}.$$

Далее находим оригиналы для каждой из простых дробей:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & \frac{1}{p}, \\ e^t & \to & \frac{1}{p-1}, \\ \cos 2t & \to & \frac{p}{p^2+4}, \\ \sin 2t & \to & \frac{2}{p^2+4} \end{array}$$

и, пользуясь свойством линейности, находим

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

Пример 2. Для изображения $F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1}$ найти оригинал $f(t)$.

Решение: $F(p) = e^{-p}\frac{1}{p+1}$, $e^{-t} \to \frac{1}{p+1}$. Множитель e^{-p} указывает на необходимость применения теоремы запаздывания при $\tau = 1$. Поэтому

$$e^{-(t-1)} \to \frac{e^{-p}}{p+1}.$$

Итак,

$$f(t) = e^{1-t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

По данному изображению найти оригиналы:

67) $F(p) = \dfrac{2e^{-p}}{p^3}$.

68) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2}$.

69) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$.

70) $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p+3}$.

71) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

72) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

73) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

74) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

75) $F(p) = \dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$.

76) $F(p) = \dfrac{1}{7-p+p^2}$.

77) $F(p) = \dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

78) $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

79) $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

80) $F(p) = \dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

81) $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

82) $F(p) = \dfrac{p}{p^3+1}$.

83) $F(p) = \dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

84) $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

85) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

86) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}\right)$.

87) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2-1} + \dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

88) $F(p) = \dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p^2+4)}$.

89) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

90) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p^2+1)}$.

§4. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение n – го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0\frac{d^n x(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx(t)}{dt}+a_n x(t)=f(t). \tag{1}$$

Требуется найти решение $x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0, x'(0)=x_0',\ldots,x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Пусть $x(t)\to X(p), f(t)\to F(p)$, тогда, применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, получим вместо дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2) операторное уравнение

$$\begin{aligned}(3)\quad (a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)X(p)-\\ -a_0(p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'\ldots+x_0^{(n-1)})-\\ -a_1(p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'\ldots+x_0^{(n-2)})-\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -a_{n-2}(px_0+x_0'-a_{n-1}x_0=F(p).\end{aligned}$$

Из уравнения (3) находим

$$X(p)=\frac{F(p)+\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}, \tag{4}$$

где

$$\psi_{n-1}(p) = a_0(p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' \ldots + x_0^{(n-1)}) +$$
$$+ a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' \ldots + x_0^{(n-2)}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{n-2}(px_0 + x_0' - a_{n-1}x_0),$$

$$\varphi_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n.$$

Выражение (4) представляет собой изображение решения $x(t)$ уравнения (1). Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы получим решение задачи Коши для уравнения (1).

Если мы имеем нулевые начальные условия, то есть

$$x_0 = x_0' = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0,$$

то решение уравнения (3) примет вид

$$X(p) = \frac{F(p)}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n}.$$

Найдя оригинал этого изображения, получим решение задачи Коши уравнения (1) при нулевых начальных условиях.

Рассмотрим случай $n = 2$ – уравнение второго порядка.

$$a_0\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_2x(t) = f(t)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$.

Тогда, если $x(t) \to X(p), f(t) \to F(p)$, то получаем операторное уравнение

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)X(p) - (a_0px_0 + a_0x_0' + a_1x_0) = F(p),$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_0' + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

Находя по изображению $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы получим решение поставленной задачи Коши.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t,$$

удовлетворяющее начальным условиям при $t = 0 : x_0 = x_0' = 0$.

Решение: Пусть $x(t) \to X(p)$. Так как $f(t) = t$, то $t \to \frac{1}{p^2}$.
Далее получаем

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &\to pX(p) - x(0) = pX(p), \\ \tfrac{d^2x}{dt^2} &\to p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p). \end{aligned}$$

В результате получаем уравнение для изображений (операторное уравнение)

$$X(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2}$$

и его решение

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)}.$$

Чтобы найти для этого изображения оригинал, разложим дробь на элементарные дроби

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+2},$$

где A, B, C, D – неопределённые коэффициенты.

Для нахождения коэффициентов получаем следующую систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} A + C + D &= 0, \\ 3A + B + 2C + D &= 0, \\ A + 3B &= 0, \\ 2B &= 1. \end{aligned} \right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= -\tfrac{3}{2}, & B &= \tfrac{1}{2}, \\ C &= \tfrac{5}{2}, & D &= -1. \end{aligned}$$

Тогда

$$X(p) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

и по формулам 1, 9 и 4 таблицы изображений на с. 161 находим решение

$$x(t) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{2}e^{-t} - e^{-2t}.$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Решение:

$$\begin{aligned} x(t) &\to X(p), \\ x'(t) &\to pX(p) - x(0) = pX(p), \\ x''(t) &\to p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \end{aligned}$$

$$\cos t \to \frac{p}{p^2+1}, \quad p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1}.$$

Отсюда
$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$
Находим оригинал для $X(p)$:
$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{p^2+1} & \leftarrow & \sin t, \\ \frac{2p}{(p^2+1)^2} & \leftarrow & t\sin t. \end{array}$$
Значит $X(p) \rightarrow t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t$ и получаем решение исходного уравнения
$$x(t) = (t-1)\sin t.$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

91) $x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$
92) $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
93) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
94) $x''' + x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
95) $x'' + 2x' = t\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
96) $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$
97) $x''' - x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
98) $x'' - 2x' + x = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
99) $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2.$
100) $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
101) $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$
102) $x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
103) $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
104) $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$
105) $x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
106) $x'' + 2x' + 5x = 3, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
107) $x^{IV} - x'' = \cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = x'''(0) = 0.$
108) $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$
109) $x'' + 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
110) $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
111) $x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
112) $x''' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 2.$
113) $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = x''(0) = 0.$
114) $x''' + x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0.$
115) $x^{IV} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

116) $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$

117) $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

118) $x''' + x' = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -2, \quad x''(0) = 0.$

119) $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

120) $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

121) $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$

122) $x''' + x = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0.$

123) $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

124) $x'' - 2x' + x = t - \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

125) $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

126) $x'' + 4x = 2\cos t \cdot \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

127) $x'' + x = te^t + 4\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

128) $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

129) $x'' + x' = 4\sin^2 t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$

130) $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -2.$

131) $x'' - 3x' + 2x = e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

132) $x'' - x' = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

133) $x''' + x = \dfrac{1}{2}t^2e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

134) $x'' + x = t\cos 2t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

135) $x'' + n^2x = a\sin(nt + \alpha), \quad x(0) = x'(0) = 0.$

136) $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

137) $x^{IV} + 2x'' + x = t\sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

138) $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

139) $x'' + 4x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

140) $x''' + x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

141) $x^{IV} + x''' = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \quad x'''(0) = \gamma.$

142) $x'' - 4x = \sin\dfrac{3}{2}t \cdot \sin\dfrac{1}{2}t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

143) $x^{IV} - 5x'' + 10x' - 6x = 0, \; x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = 6, x'''(0) = -14.$

144) $x'' + x' + x = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

145) $x'' + x = t\cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

146) $x''' + 3x'' - 4x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2.$

147) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

148) $x''' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

§5. Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом производится аналогично тому, как решается одно дифференциальное уравнение.

Например, пусть дана система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{ik}\frac{dx_k}{dt}+c_{ik}x_k\right)=f_i(t) \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

где $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} = \text{const}$, при начальных условиях

$$x_k(0)=\alpha_k, \quad x_k'(0)=\beta_k.$$

Обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ изображения функций $x_k(t)$ и $f_i(t)$ соответственно, перейдём от исходной системы к системе уравнений для изображений

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik}\right)=F_i(p)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left[(a_{ik}p+b_{ik})\alpha_k+a_{ik}\beta_k\right] \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Решая эту систему как линейную алгебраическую систему уравнений относительно $X_k(p)$, найдём изображения $X_k(p)$, а затем их оригиналы $x_k(t)$ для $k=1,2,\ldots,n$. Это и будет решение задачи Коши для исходной системы дифференциальных уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x'' &= 3(y-x+z), \\ y'' &= x-y, \\ z'' &= -z \end{cases}$$

при начальных условиях

$$\begin{array}{rclrcr} x(0) &=& 0, & x'(0) &=& 0, \\ y(0) &=& 0, & y'(0) &=& -1, \\ z(0) &=& 1, & z'(0) &=& 0. \end{array}$$

Решение: Пусть

$$x(t)\to X(p), \quad y(t)\to Y(p), \quad z(t)\to Z(p).$$

Тогда исходная система уравнений при заданных начальных условиях запишется в операторной форме в следующем виде

$$\begin{cases} p^2X(p) &= 3(Y(p)-X(p)+Z(p)), \\ p^2Y(p)+1 &= X(p)-Y(p), \\ p^2Z(p)-p &= -Z(p). \end{cases}$$

Эта система уравнений относительно изображений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Решая её относительно изображений $X(p), Y(p), Z(p)$, получим

$$\begin{array}{l} X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \\ Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1}, \\ Z(p) = \frac{p}{p^2+1}. \end{array}$$

Найдём оригиналы этих изображений.

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}.$$

Представим $X(p)$ в виде суммы элементарных дробей и найдём неопределённые коэффициенты.

$$\begin{array}{lcl} X(p) &=& \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^2+4}. \\ 3(p-1) &=& Ap(p^2+4) + B(p^2+4) + (Cp+D)p^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcl} p^3 & 0 &=& A+C, \\ p^2 & 0 &=& B+D, \\ p & 3 &=& 4A, \\ p^0 & -3 &=& 4B. \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{lcl} A = \frac{3}{4}, & B = -\frac{3}{4}, \\ D = \frac{3}{4}, & C = -\frac{3}{4}. \end{array}$$

$$X(p) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2+4}.$$

Находя оригинал для каждого слагаемого, получим

$$x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t.$$

Далее найдём оригинал для $Y(p)$.

$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1}, \quad \frac{1}{p^2+1} \to \sin t.$$

Обозначим

$$Y_1(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Представим $Y_1(p)$ в виде суммы элементарных дробей и найдём неопределённые коэффициенты.

$$Y_1(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1} + \frac{Lp+M}{p^2+4}.$$

$$\begin{aligned}3(p-1) = Ap(p^2+1)(p^2+4) + B(p^2+1)(p^2+4) + \\ + (Cp+D)p^2(p^2+4) + (Lp+M)p^2(p^2+1).\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменного p, получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов.

$$\begin{cases} A+C+L = 0, \\ B+D+M = 0, \\ 5A+4C+L = 0, \\ 5B+4D+M = 0, \\ 4A = 3, \\ 4B = -3. \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{llll} A = \frac{3}{4}, & B = -\frac{3}{4}, \\ C = -1, & D = 1, \\ L = \frac{1}{4}, & M = -\frac{1}{4}. \end{array}$$

$$\begin{aligned}Y(p) = Y_1(p) - \frac{1}{p^2+1} = \\ = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+1} = \\ = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1} + +\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+4}.\end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \cos t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

Найдём оригинал для $Z(p)$.

$$Z(p) = \frac{p}{p^2+1}, \quad \frac{p}{p^2+1} \to \cos t, \quad z(t) = \cos t.$$

Итак, получили решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}t - \tfrac{3}{4}\cos 2t + \tfrac{3}{8}\sin 2t, \\ y(t) &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}t - \cos t + \tfrac{1}{4}\cos 2t - \tfrac{1}{8}\sin 2t, \\ z(t) &= \cos t. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений при заданных начальных условиях:

149) $\begin{cases} x'+y = 0, \\ y'+x = 0, \end{cases}$ $x(0)=1, \quad y(0)=-1.$

150) $\begin{cases} x'+x = y+e^t, \\ y'+y = x+e^t, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1.$

151) $\begin{cases} x'-y'-2x+2y = 1-2t, \\ x''+2y'+x = 0, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=x'(0)=0.$

152) $\begin{cases} x''-3x'+2x+y'-y = 0, \\ y''-5y'+4y-x'+x = 0, \end{cases}$ $x(0)=x'(0)=y'(0)=0,$ $y(0)=1.$

153) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x+2y, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1.$

154) $\begin{cases} 2x''-x'+9x-y''-y'-3y = 0, \\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y = 0, \end{cases}$ $x(0)=x'(0)=1,$ $y(0)=y'(0)=0.$

155) $\begin{cases} x'+y'-y = e^t, \\ 2x'+y'+2y = \cos t, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=0.$

156) $\begin{cases} x' = -y-z, \\ y' = -x-z, \\ z' = -x-y, \end{cases}$ $x(0)=-1, \quad y(0)=0, \quad z(0)=1.$

157) $\begin{cases} x' = y+z, \\ y' = 3x+z, \\ z' = 3x+y, \end{cases}$ $x(0)=0, \quad y(0)=1, \quad z(0)=1.$

158) $\begin{cases} x' = 2x-y+z, \\ y' = x+z, \\ z' = -3x+y-2z, \end{cases}$ $x(0)=1, \quad y(0)=1, \quad z(0)=0.$

Таблица некоторых изображений и их оригиналов

	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{sh} \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{ch} \alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-at} \sin \alpha t$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-at} \cos \alpha t$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t \sin at$
11	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$
14	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{\alpha t}$
15	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{a}$	$\frac{\sin at}{t}$
16	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
17	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin \sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{1}{2t}$
18	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \cos \sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \frac{1}{2t}$
19	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
20	$F_1(p) \cdot F_2(p)$	$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$

Везде в таблице $n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$.